Определение: *обыкновенным дифференциальным уравнением* называется соотношение вида $\Phi(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots y, x) = 0$, где y – функция переменной x. *Порядком дифференциального уравнения* называется максимальный порядок входящих в него производных; *степенью дифференциального уравнения* – максимльная степень производной высшего порядка.

Определение: *решением дифференциального уравнения* называется всякая функция, имеющая производные соответствующих порядков, при подстановке которой в уравнение оно обращается в тождество (то есть выполняется при всех x, на которых задано решение.

Определение: *общим решением дифференциального уравнения* n-го порядка называется функция $n+1$ переменной $f(x, C_1, \ldots C_n)$; *частным решением* называется всякое решение $f(x, C_1^0, \ldots C_n^0)$, где $C_1^0, \ldots C_n^0$ – произвольный набор констант. График частного решения называется *интегральной кривой дифференциального уравнения.* Процесс нахождения общего решения называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Существование решения. Приближённые методы решения.

Определение: *задачей Коши* для дифференциального уравнения первого порядка называется система двух соотношений $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Теорема 1 (без доказательства): $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область; $f\colon D \to \mathbb{R},\ f \in C(D),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D),\ (x_0, y_0) \in D$; тогда $\exists\ \delta > 0\colon$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ задача Коши для уравнения первого порядка имеет единственное решение.

Теорема 2 (без доказательства): $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область; $f\colon D \to \mathbb{R},\ f \in C(D)$, тогда задача Коши для уравнения первого порядка имеет в D по крайней мере одно решение. Если, кроме этого, выполняется *условие Липшица* ($\forall\ x, y_1, y_2\colon (x, y_1), (x, y_2) \in D\ \exists\ L \in \mathbb{Z}_+\colon\ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$), то $\exists\ \delta > 0\colon$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ задача Коши имеет единственное решение.

Теорема 3 (без доказательства): $D \subseteq \mathbb{R}^3$ – область; $f(x, y, \mu)\colon\ D \to \mathbb{R},\ f \in C(D)$ (μ – параметр). Для f на D выполняется условие Липшица; тогда $\exists\ y(x, \mu)$ – решение задачи Коши для уравнения первого порядка, причём $y \in C(D_1)$, где $D_1 = \{(x, \mu) | \exists\ y\colon (x, y, \mu) \in D\}$. Это означает, что реализуется непрерывная зависимость от начальных условий.

Теорема 4 (без доказательства): $D \subseteq \mathbb{R}^3$ – область; $f(x, y, \mu)\colon\ D \to \mathbb{R}$; f непрерывна по x и аналитически зависит от y, μ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, \mu_0) \in D$ $\left(\text{то есть } f \in C(D),\ \exists\ \dfrac{\partial\, f}{\partial\, y},\ \dfrac{\partial\, f}{\partial\, \mu}\right)$; тогда $y(x, \mu)$ является аналитической в некоторой окрестности точки (x_0, μ_0).

Теорема 5: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область; $f\colon D \to \mathbb{R},\ f \in C^k(D)$; тогда $y \in C^{k+1}(D_1)$, где $D_1 = \{x |\ \exists\ y\colon (x, y) \in D\}$.

$\triangle$ $y' = f \in C^k(D) \Rightarrow y \in C^{k+1}(D_1)$. $\blacksquare$

Приближённые методы решения дифференциальных уравнений:

1. *Метод изоклин* (*изоклины* – линии, на которых $f(x, y) = \text{const}$): $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, то есть функция f позволяет определить значения производной во всех точках. Таким образом, можно задать на плоскости поле направлений касательных и решить задачу Коши графически.

2. *Метод ломаных Эйлера*: пусть $y(x_0) = y_0$ – начальное условие; требуется найти значение y в точке x. Разобъём отрезок $[x_0, x]$ на n равных частей; $h = \dfrac{|x - x_0|}{n},\ x_k =$

x_0+kh. Построим касательную $l_0(x)$ к графику $y(x)$ в точке x_0 и будем считать, что $y(x_1) = l_0(x_1) = y_1$. Проводя аналогичные операции, доходим то искомой точки x. Очевидно, что точность решения будем тем выше, чем больше число n.

1.2. Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной.

1. Уравнения с разделяющимися переменными: пусть уравнение представимо в виде $y' = f(x)\cdot g(y)$. Тогда в той области, где $g(y) \neq 0$ $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \Rightarrow \Phi(x,y,C) = 0$. Если $\exists\ y_1\colon g(y_1) = 0$, то, очевидно, y_1 также является решением. Таким образом, мы получили общее решение, а также набор частных; эти частные решения входят в общее решение в случае, если $\int\limits_{y_0}^{y_1} \dfrac{dy}{g(y)}$ расходится и не входят в общее, если соответствующий интеграл сходится. Очевидно, в последнем случае решение не является единственным.

2. Однородные уравнения: $y' = \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ – однородная функция (то есть $\forall\ k \neq 0\ \varphi(kx,ky) = \varphi(x,y)$). Замена $z = \frac{y}{x}$ сводит такие уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

3. Линейные уравнения: $y' + p(x)y = q(x)$; сделаем замену $y = z(x)\cdot u_0(x) \Rightarrow z'u_0 + zu_0' + pzu_0 = q$. Выберем $u_0\colon\ u_0' + pu_0 = 0$ (u_0 – частное решение этого уравнения с разделяющимися переменными). Найдя u_0, можно найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными на z. Полученное $y = u_0 z$ будет общим решением исходного уравнения согласно теореме 1 2.1.

4. Уравнение Бернулли: $y' + p(x)y = y^\alpha q(x)$. Замена $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow y' = \dfrac{z'y^\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{z'}{1-\alpha}\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Таким образом, $\left(\dfrac{z'}{1-\alpha} - q\right) z^\alpha + pz = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

5. Уравнение Риккати: $y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$ не решается в общем виде. Если известно y_1 – частное решение, то общее решение ищется в виде $y = y_1 + z \Rightarrow y_1' + z' + py_1 + pz + ry_1^2 + 2ry_1z + rz^2 = q \Rightarrow z' + pz + 2ry_1z + rz^2 = 0 \Leftrightarrow z' + z(p + 2ry_1) = -rz^2$ – уравнение Бернулли.

6. Уравнение в полных дифференциалах: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Если найдено $u\colon\ du = Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$; в случае $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0\ \exists\ y(x)\colon\ u(x,y(x)) = C$. Выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом в случае, когда существует односвязная область $D\colon\ \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(D),\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В некоторых случаях полный дифференциал может быть образован только после домножения исходного выражения на $\mu(x,y)$ (*интегрирующий множитель*); тогда необходимым условием разрешимости будет $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow P\dfrac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial P}{\partial y} = Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Если μ является функцией только одной переменной, то это уравнение в частных производных становится обыкновенным линейным дифференциальным уравнением и легко может быть решено.

Примеры уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной:

1. *Уравнение радиоактивного распада*: пусть N – количество нераспавшегося вещества. В соответствии с законом радиоактивного распада $\dfrac{dN}{dt} = -\beta N$ ($\beta > 0$) $\Rightarrow \dfrac{dN}{N} = -\beta dt \Rightarrow \ln N = -\beta t + C_1 \Rightarrow N = Ce^{-\beta t};\ N(0) = C = N_0 \Rightarrow N = N_0 e^{-\beta t}$. $\tau_{1/2}$ – время, за которое распадается половина вещества (период полураспада): $\dfrac{N_0}{2} = N_0 e^{-\beta\tau_{1/2}} \Rightarrow \tau_{1/2} = \dfrac{1}{\beta}\ln 2$.

2. *Уравнение, описывающее тримолекулярную реакцию* ($2NO + O_2 \leftrightarrows 2NO_2$): $y_1(t) = [NO], y_2(t) = [O_2]$, тогда, согласно закону действующих масс,

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2ky_1^2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -ky_1y_2^2 \end{cases} \Rightarrow dy_1 = 2dy_2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}(y_1 - C).$$

Таким образом, $y_1' = -ky_1^2(y_1 - C) \Rightarrow \dfrac{1}{y_1^2} \cdot \dfrac{dy_1}{dt} = -k(y_1 - C) \Rightarrow \dfrac{d\left(\frac{1}{y_1}\right)}{dt} = -k\left(\dfrac{1}{\frac{1}{y_1}} - C\right)$; пусть $z = \dfrac{1}{y_1}$, тогда $\dfrac{zdz}{1 - zC} = kdt \Rightarrow$

$$kt = \int \frac{zdz}{1 - zC} = -\frac{1}{C} \cdot \int \left(1 + \frac{1}{zC - 1}\right) dz = -\frac{1}{C}\left(z + \frac{1}{c}\ln|zC - 1| + C_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = B - \frac{z}{Ck} - \frac{1}{C^2k}\ln|zC - 1|.$$

Определение: *особой точкой* обыкновенного дифференциального уравнения называется точка, в окрестности которой решение уравнения не существует (особая точка *первого типа*) или не единственно (особая точка *второго типа*).

Классификация особых точек:

1. *Узел* – все решения бесконечно близко подходят к особой точке и не удаляются от неё, причём каждое решение подходит под одним и тем же, фиксированным углом.

2. *Седло* – в любой окрестности точки существует решение, которое, приблизившись, начинает от неё удаляться.

3. *Центр* – решения образуют замкнутые траектории, содержащие внутри себя особую точку.

4. *Фокус* – решения бесконечно близко подходят к особой точке, причём для каждого решения направление меняется в зависимости от радиуса окрестности.

Более подробная классификация и иллюстрации приведены в 3.2.

1.3. Уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной.

Теорема 1 (без доказательства): $D \subseteq \mathbb{R}^3$ – область; $F(x, y, y')\colon D \to \mathbb{R}$, $F \in C(D)$, $\exists F'_y$, $F'_{y'} \in C(D)$; $(x_0, y_0, y_1) \in D$, $F'_{y'}(x_0, y_0, y_1) \neq 0$. Задача Коши формулируется как $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1; \end{cases}$ тогда $\exists\ \delta > 0$: на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ существует и единственна $y(x)$, удовлетворяющая задаче Коши.

Уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно хотя бы одной из переменных (иначе решение задачи Коши тривиально), тогда возможны три случая:

1) *Уравнение разрешимо относительно* y' – в этом случае получим совокупность уравнений, разрешённых относительно производной, которые могут быть решены методами, рассмотренными в 1.2.

2) *Уравнение разрешимо относительно* y: $y = f(x, y')$; пусть $y' = p(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = f(x, p(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot p' \Rightarrow \begin{cases} P(x, p, C) = 0 \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

(полученное уравнение разрешимо относительно p')

3) *Уравнение разрешимо относительно* x: $x = f(y, y')$; пусть $y' = p(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + p' \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(y, p, C) = 0 \\ x = f(y, p). \end{cases}$$

(полученное уравнение разрешимо относительно p')

Уравнение Лагранжа: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$

$$y' = p \Rightarrow y = x\varphi(p) + \psi(p) \Rightarrow p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \cdot p' + \psi(p') \cdot p' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p - \varphi(p) = p'(x\varphi'(p) + \psi'(p)) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dp}(p - \varphi(p)) = x\varphi'(p) + \psi'(p) - \text{линейное}, \ p' \neq 0 \\ p - \varphi(p) = 0 - \text{алгебраическое уравнение}, \ p' = 0. \end{cases}$$

Уравнение Клеро: $y = xy' + \psi(y')$

$$y' = p \Rightarrow p = p + xp' + \psi'(p) \cdot p' \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} p' = 0 \\ x = -\psi'(p) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} p = C \\ y = xC + \psi(p) \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = -\psi'(p) \\ y = xp + \psi(p). \end{array} \right.$$

Определение: *особым решением* дифференциального уравнения называется кривая, состоящая из особых точек второго типа.

Определение: *огибающей семейства кривых* называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.

Теорема 2: огибающая семейства кривых $\Phi(x, y, a) = 0$ задаётся уравнением $\Phi'_a = 0$.

$\triangle$ Пусть огибающая задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = \varphi(a) \\ y = \psi(a) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}$.

$\Phi(x, y, a) = 0 \Rightarrow \dfrac{d\Phi}{dx} = 0 = \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' \Rightarrow y' = -\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y} = \dfrac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \Leftrightarrow \Phi'_y \cdot \psi'(a) + \Phi'_x \cdot \varphi'(a) = 0$ – условие касания огибающей и одной из кривых семейства. Но в каждой точке огибающей $\Phi(\varphi(a), \psi(a), a) = 0 \Rightarrow \dfrac{d\Phi}{da} = \Phi'_x \cdot \varphi'(a) + \Phi'_y \cdot \psi'(a) + \Phi'_a = 0 \Rightarrow \Phi'_a = 0.$ ■

Очевидно, что семейство решений дифференциального уравнения может быть задано как $F(x, y, y') = 0$ или $\Phi(x, y, C) = 0$; тогда особое решение будет огибающей этих семейств, то есть особые решения могут быть найдены без полного интегрирования уравнения, из условия огибания (в качестве параметра рассматриваются $y' = p$ или C). В зависимости от этого получим *p-дискриминантные кривые* $F'_{y'}(x, y, p) = 0$ или *C-дискриминантные кривые* $\Phi'_C(x, y, C) = 0$.

2. Уравнения высших порядков.

2.1. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

Определение: *линейным дифференциальным уравнением* n-го порядка называется уравнение вида $a_0(x)\cdot y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\cdot y=f(x)$; в случае $f\equiv 0$ уравнение называется *однородным* (иначе – неоднородным). Однородное уравнение может быть записано в виде $y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots y^{(n-1)})$; тогда *задача Коши* формулируется как

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots y^{(n-1)}) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_{01} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1} \end{cases}$$

Теорема 1 (без доказательства): $G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ – область; $f\colon G\to\mathbb{R},\ f\in C(G)$; $M=(x_0,y_0,y_{01},\ldots y_{0n-1})\in G$. Тогда через точку M проходит хотя бы одна интегральная кривая – решение задачи Коши для линейного однородного диф. уравнения. Если, кроме этого, $\forall\ (x,y_{10},y_{11},\ldots y_{1n-1}),\ (x,y_{20},y_{21},\ldots y_{2n-1})\in G\ \exists\ k>0:$

$$|f(x,y_{10},\ldots y_{1\ n-1})-f(x,y_{20},\ldots y_{2n-1})|\leq k\cdot\sum_{i=0}^{n-1}|y_{1i}-y_{2i}|,$$

то такое решение единственно.

Определение: $[a,b]\subset\mathbb{R};\ y_1,\ldots y_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$; система функций $\{y_1,\ldots y_n\}$ *линейно независима* на отрезке $[a,b]$, если из того, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\equiv 0$ следует, что $\alpha_i=0\ \forall\ i=\overline{1,n}$.

Примеры линейно независимых систем функций:

1. $1,x,\ldots x^n$: существование $\alpha_i\neq 0\colon\ \alpha_0+\alpha_1 x+\ldots\alpha_n x^n\equiv 0$, означает, что многочлен степени n с хотя бы одним ненулевым коэффициентом имеет бесконечно много корней, что невозможно.

2. $e^{k_1x},\ldots e^{k_nx}$ $(k_i\neq k_j\ \forall\ i,j=\overline{1,n}\colon\ i\neq j)$. $\alpha_1e^{k_1x}+\ldots+\alpha_ne^{k_nx}\equiv 0\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+\alpha_ne^{(k_n-k_1)x}\equiv 0\Rightarrow$ (продифференцируем) $\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}\equiv 0$;проводя аналогичные операции, получим $C\cdot e^{(k_n-k_{n-1}-\ldots-k_1)x}\equiv 0$, что невозможно.

Замечание: если функции $y_1,\ldots y_n$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то и любая линейная комбинация этих функций является решением этого уравнения.

Определение: *определителем Вронского* системы функций $y_1,\ldots y_n$ называется

$$W(y_1(x),\ldots y_n(x))=\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 2: если система функций $\{y_1,\ldots y_n\}$ линейно зависима на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, то $W(y_1,\ldots y_n)\equiv 0$.

$\triangle$ Система функций $\{y_1,\ldots y_n\}$ линейно зависима, поэтому $\exists\ \{\alpha_i\}_{i=1}^n\colon\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2\neq 0,\ \alpha_1y_1+$

$\ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \Rightarrow \ \forall\ k = \overline{1, n-1}\ \alpha_1 y_1^{(k)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(k)} \equiv 0$. Таким образом, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \quad \text{– систему однородных линейных уравнений.}$$

Эта система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель равен нулю (то есть $W(y_1, \ldots y_n) \equiv 0$). ■

Теорема 3: система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ линейно независима на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$; $y_i(x)$ – решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами. Тогда $W(y_1, \ldots y_n) \not\equiv 0$.

△ Пусть начальные условия заданы в точке x_0, а $W \equiv 0$. Тогда $W(y_1(x_0) \ldots y_n(x_0)) = 0$, а система линейных однородных уравнений $\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$ имеет нетривиальное решение $(\alpha_1^0, \ldots \alpha_n^0)$.

Рассмотрим функцию $y(x) = \alpha_1^0 y_1(x) + \ldots \alpha_n^0 y_n(x) \not\equiv 0$, которая, согласно замечанию, также является решением дифференциального уравнения. Выберем нулевые начальные условия $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, им удовлетворяют два решения – $y(x)$ и $y \equiv 0$, что противоречит теореме 1. Таким образом, исходное предположение неверно и $W(y_1, \ldots y_n) \not\equiv 0$. ■

Теорема 4: $\{y_1, \ldots y_n\}$ – линейно независимая на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ система решений однородного линейного диффренциального уравнения n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами. Тогда любое решение этого уравнения представимо в виде $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_k y_k$.

△ Согласно замечанию, $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_k y_k$ – решение диф. уравнения; пусть оно удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01}, \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$; тогда $\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_{01} \\ \vdots \\ C_1 y^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \end{cases}$ $W(y_1(x_0), \ldots y_n(x_0) \neq 0$, поэтому $\exists\ (C_1^0, \ldots C_n^0)$ $\neq 0$ – решение системы. Но $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)$ – решение диф. уравнения с теми же начальными условиями, то есть, по теореме 1, $y \equiv \varphi$. ■

Следствие: линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными коэффициентами имеет ровно n линейно независимых решений.

△ Непосредственно из теоремы следует, что уравнение не может иметь более n линейно независимых решений; между тем, изменением начальных условий всегда можно подобрать набор n линейно независимых решений, из которых можно составить невырожденную матрицу. Пусть заданы условия

$$\begin{matrix} y_1(x_0) = a_{11} & & y_n(x_0) = a_{1n} \\ & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1} & & y_n^{(n-1)}(x_0) = a_{nn} \end{matrix} \Rightarrow W(y_1(x_0), \ldots y_n(x_0)) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow W \not\equiv 0$, поэтому, из теоремы 3, $\{y_1, \ldots y_n\}$ – линейно независимая система решений. ■

Определение: система любых n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется фундаментальной системой решений.

Замечание: если уравнения $\begin{array}{l} y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0 \\ y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)y=0 \end{array}$ имеют одинаковую фундаментальную систему решений, то $a_k \equiv b_k \ \forall\ k=\overline{1,n}$.

$\triangle$ Рассмотрим разность двух уравнений $(b_1(x)-a_1(x))y^{(n-1)}+\ldots+(b_n(x)-a_n(x))y=0$ – это уравнение $(n-1)$-го порядка, которое, согласно следствию из теоремы 4, имеет $n-1$ линейно независимых решений; между тем, фундаментальная система решений исходных уравнений остаётся фундаментальной системой решений для полученного уравнения. Это означает, что полученное уравнение тривиально, то есть $b_k \equiv a_k$. $\blacksquare$

$\{y_1,\ldots y_n\}$ – фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения; y – линейная комбинация $y_1,\ldots y_n$. Тогда, по теореме 2,

$$W(y_1,\ldots y_n,y)=0=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=y^{(n)}\cdot W(y_1,\ldots y_n)+y^{(n-1)}\cdot\frac{dW(y_1,\ldots y_n)}{dx}+\ldots$$

(разложение по столбцу), где

$$\frac{dW(y_1,\ldots y_n)}{dx}=\begin{vmatrix} y_1' & \ldots & y_n' \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1'' & \ldots & y_n'' \\ y_1'' & \ldots & y_n'' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

(определитель дифференцируется построчно).

Пусть уравнение имеет вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots=0=y^{(n)}\cdot W(y_1,\ldots y_n)+y^{(n-1)}\cdot\frac{dW(y_1,\ldots y_n)}{dx}+\ldots\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -p_1(x)=\frac{W'}{W}\Rightarrow \ln|W|=-\int p_1(x)dx\Rightarrow W=W_0\cdot e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Полученное соотношение может быть полезно при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$; если $y_1\not\equiv 0$ – частное решение, то

$$C\cdot e^{-\int p(x)dx}=\begin{vmatrix} y & y_1 \\ y' & y_1' \end{vmatrix}\Rightarrow -C\cdot e^{-\int pdx}=-yy_1'+y'y_1\Rightarrow d\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{-C\cdot e^{-\int pdx}}{y_1^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{y}{y_1}=\int\frac{Ce^{-\int pdx}}{y_1^2}dx+C_1\Rightarrow\Rightarrow y=y_1\left(\int\frac{Ce^{-\int pdx}}{y_1^2}dx+C_1\right)$$

– *формула Остроградского-Лиувилля.*

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Понижение порядка:

1. Если уравнение имеет вид $F(x, y^{(k)}, \dots y^{(n)}) = 0$, то замена $p = y^{(k)}$ приведёт к уравнению $(n-k)$-го порядка.

2. Если обе части уравнения представляются в виде полного дифференциала $F(x, y, \dots y^{(n)}) = dg(x, y, \dots y^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow g(x, y, \dots y^{(n-1)}) = C$.

3. Если известно частное решение $y_1 \not\equiv 0$ уравнения, то можно искать решение в виде $y = zy_1$; при подстановке в исходное уравнение получим уравнение $(n-1)$-го порядка.

4. Если в уравнение не входит x, то есть $F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$, то можно взять $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p$ и так далее – получим уравнение $(n-1)$-го порядка.

Определение: *линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$, где $a_1, \dots a_n = \mathrm{const}$. *Характеристическим многочленом* такого уравнения называется многочлен $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$. $F(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением.*

Теорема 1: $\lambda_1, \dots \lambda_m$ – корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, имеющие кратность r_i. Тогда $\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots x^{r_i-1}e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^m$ – фундаментальная система решений этого уравнения.

$\triangle$ Пусть $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$; $Ly \overset{def}{=} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$; $\left(e^{\lambda x}u\right)^{(m)} = e^{\lambda x}(\lambda^m u + C_m^1 \lambda^{m-1}u' + \ldots + u^{(m)})$, поэтому $L(e^{\lambda x}u) = e^{\lambda x}(u(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) + u'(n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \ldots) + \ldots) = e^{\lambda x}\left(uF(\lambda) + u'\dfrac{F'(\lambda)}{1!} + \ldots\right) = e^{\lambda x} \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} u^i \cdot \dfrac{F^{(i)}(\lambda)}{i!}$. λ_i обращает в ноль первые $r_i - 1$ производных F, поэтому, для того, чтобы $e^{\lambda_i x}u$ являлось решением уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $u^{(r)} \equiv \ldots u^{(n)} \equiv 0$. Поэтому все функции системы $\{e^{\lambda_i x}, xe^{-\lambda_i x}, \dots x^{r_i-1}e^{-\lambda_i x}\}$ являются решениями; их линейная независимость следует из примеров линейно независимых систем в 2.1. $\blacksquare$

Пример (линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами): $y'' + py' + qy = 0$; $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – характеристическое уравнение, а $\lambda_1,\ \lambda_2$ – его корни. Тогда возможны три случая –

1. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$;

3. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$; $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x)$; мы рассматриваем только действительный случай, поэтому условие $i(C_1 - C_2) \in \mathbb{R}$ приводит к решению вида $y = e^{\alpha x}(C_1' \cos\beta x + C_2' \sin\beta x)$.

Уравнение Эйлера: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Сделаем замену $\begin{cases} x = e^t,\ x > 0 \\ x = -e^t,\ x < 0; \end{cases}$ при $x > 0$ $y_t' = y_x' e^t,\ y_{tt}'' = y_{xx}'' e^{2t} + y_x' e^t, \ldots \Rightarrow y_x' = \dfrac{y_t'}{e^t},\ y_{xx}'' = \dfrac{y_{tt}'' - y_t'}{e^{2t}}, \ldots$; аналогично при $x < 0$; таким образом получим линейное уравнение с постоянным коэффициентами на функцию $y(t)$.

Пример (рассеяние параллельного пучка частиц на одномерной мишени):

Пусть $V(x)$ – потеницал взаимодействия частиц пучка и мишени, тогда уравнение Шредингера можно записать как $i\hbar \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \cdot \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + V(x)\psi$, где $\psi(x,t)$ – волновая функция частиц пучка (вероятность нахождения частицы в точке x в момент времени t). (Само уравнение является одномерным случаем трёхмерного уравнения Шредингера $i\hbar \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta\psi + V(x,y,z,t)\psi$). Будем считать, что переменные разделяются, то есть искать $\psi(x,t) = \psi_0(x)T(t)$; тогда

$$i\hbar \cdot \psi_0 T' = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot T\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V(x)\psi_0 T \Rightarrow i\hbar \cdot \frac{T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\psi_0''}{\psi_0} + V(x) = E$$

(в разных частях уравнения находятся функции только одной переменной (T и x соответственно); это возможно лишь в том случае, когда обе части уравнения тождественно постоянны; постоянную можно обозначить через E, поскольку она имеет смысл энергии).

Таким образом, получим

$$\begin{cases} T' - \dfrac{E}{i\hbar} \cdot T = 0 \Rightarrow T(t) = T_0 \exp\left(\dfrac{E}{i\hbar} \cdot t\right) \\ \psi'' + (E - V)\psi = 0, \end{cases}$$

Рассмотрим только случай финитного потенциала (то есть $V:\ \exists\, a:\ \forall\, x:\ |x| \geq a\ V(x) = 0$); обозначим за I область $x < -a$, за II: $x > a$, за III: $x > a$. Очевидно, общее решение будет комбинацией решений для трёх областей: такое решение содержит шесть произвольных постоянных, четыре из которых определяются условиями непрерывности ψ и ψ' на границах областей, а пятая – условием нормировки $\left(\forall\, t \in \mathbb{R}\ \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(x,y,z,t)dV = 1\right)$. В результате, используя формулы для однородных уравнений с постояннымикоэффициентами и полагая $k = \sqrt{E}$, получим

	I	II
$\psi_1(k,x)$	$e^{ikx} + A(k)e^{-ikx}$	$B(k)e^{ikx}$
$\psi_2(k,x)$	$D(k)e^{-ikx}$	$e^{-ikx} + C(k)e^{ikx}$

(не будем интересоваться решением в области III, что сразу обеспечит большой произвол в выборе констант; в частности, примем одну из постоянных в областях I и II за 1, а другую – за 0; одна из оставшихся постоянных необходима для сохранения нормировки, а вторая произвольна; таким образом, получим два возможных решения, обозначенных как ψ_1 и ψ_2, – функции x и k, поскольку выбор постоянной E также произволен).

Пусть функции φ_1 и φ_2 являются решениями уравнения $\psi'' + (E - V)\psi = 0$; тогда

$$\begin{matrix} \varphi_1'' - (V - k^2)\varphi_1 = 0 \mid \cdot\, \varphi_2 \\ \varphi_2'' - (V - k^2)\varphi_2 = 0 \mid \cdot\, \varphi_1 \end{matrix} \overset{+}{\Rightarrow} \frac{d}{dx}(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2) = 0 \Rightarrow W(\varphi_1, \varphi_2) = K,$$

причём значение K одинаково для частей одного и того же решения в областях I и II.

В области I $W(\psi_1, \psi_2) = W(e^{ikx} + Ae^{-ikx}, De^{-ikx}) = W(e^{ikx}, De^{-ikx}) + W(Ae^{-ikx}, De^{-ikx}) = DW(e^{ikx}, e^{-ikx}) = De^{ikx}e^{-ikx} \cdot (-ik - ik) = -2ikD$; $W(\overline{\psi_1}, \psi_2) = W(\overline{A}e^{ikx}, De^{-ikx}) = -2ik\overline{A}D$; аналогично $W(\psi_1, \overline{\psi_2}) = 2ikA\overline{D}$, $W(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) = 2ik\overline{D}$, $W(\psi_1, \overline{\psi_1}) = -2ik + 2ikA\overline{A}$, $W(\psi_2, \overline{\psi_2}) = 2ikD\overline{D}$.

В области II $W(\psi_1, \psi_2) = -2ikB$, $W(\overline{\psi_1}, \psi_2) = 2ik\overline{B}C$, $W(\psi_1, \overline{\psi_2}) = -2ikB\overline{C}$, $W(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) = 2ik\overline{B}$, $W(\psi_1, \overline{\psi_1}) = -2ikB\overline{B}$, $W(\psi_2, \overline{\psi_2}) = 2ik - 2ikC\overline{C}$, а поскольку значения определителя Вронского для одинаковых решений в областях I и II совпадают, $B = D$, $\overline{A}D + \overline{B}C = 0$, $A\overline{A} + B\overline{B} = |A|^2 + |B|^2 = 1$, $|C|^2 + |D|^2 = 1$. Расмотрим $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ – матрицу рассеяния. Тогда

$$\mathbb{S}\mathbb{S}^+ = \begin{pmatrix} A\overline{A} + B\overline{B} & A\overline{B} + \overline{B}C \\ B\overline{A} + C\overline{B} & B\overline{B} + C\overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть матрица рассеяния $\mathbb{S}$ унитарна.

Построим решение уравнения Шредингера с помощью одной из функций – например, $\psi_1:\ \varphi(x,t) = \psi_1(k,x)T(t) = \psi_1(x,t)e^{-ik^2t} = C_1e^{i(kx-\omega t)} + C_2e^{-i(kx+\omega t)}$; физический смысл такого решения – две волны, распространяющиеся в разные стороны от барьера. Это означает, что частица, приближающаяся к мишени, может как отразиться от неё, так и преодолеть препятствие. $P_I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(x,t)|^2 dx = |A|^2$ – вероятность того, что частица останется в области I; $P_{II} = |B|^2$; $|A|^2 + |B|^2 = 1$, что соответствует определению вероятности (см. теория вероятностей, 2.1). Физический смысл C и D аналогичен, $B = D$ – то есть вероятность преодоления препятствия не зависит от направления подхода к нему.

2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Теорема 1: решение неоднородного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ может быть представлено в виде $y = y_g + y_s$, где y_g – общее решение соответствующего однородного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$, а y_s – частное решение неоднородного уравнения.

$\triangle$ Очевидно, что всякая функция $y = y_g + y_s$ будет решением неоднородного уравнения. Выберем фиксированное y_s, тогда $y_g^* = y - y_s$ – решение однородного уравнения и y представимо в виде $y = y_g^* + y_s$. $\blacksquare$

Непосредственный подбор частного решения: таким образом, для решения неоднородного уравнения достаточно решить соответствующее однородное и подобрать хотя бы одно частное решение неоднородного уравнения; поиск частного решения в общем случае достаточно сложен, однако для наиболее распространённых случаев известны простые алгоритмы.

1. $f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ – многочлен степени m; если $x = 0$ не является корнем характеристического многочлена $F(x)$, то $y_s = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$, коэффициенты $A_0, \ldots A_m$ могут быть найдены подстановкой в дифференциальное уравнение и решением системы $m+1$ линейных уравнений. Если $x = 0$ является корнем $F(x)$ кратности r, то $y_s = x^r(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)$ (домножение на x^r необходимо для того, чтобы получаемая система линейных уравнений имела решение).

2. $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ выберем $y_s = e^{\alpha x} u \Rightarrow$ (теорема 1, 2.2)

$$Ly_s = e^{\alpha x}\left(F(\alpha)u + \frac{F'(\alpha)}{1!}u' + \ldots + \frac{F^{(n)}(\alpha)}{n}u^{(n)}\right) = e^{\alpha x} P_m(x).$$

Таким образом, если $x = \alpha$ не является корнем $F(x)$, то $y_s = e^{\alpha x} Q_m(x)$, а если $x = \alpha$ – корень $F(x)$ кратности r, то $y_s = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$.

3.

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cdot\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + \right.$$
$$\left. + Q_l(x)\cdot\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot e^{(\alpha+\beta i)x}(P_m(x) + iQ_l(x)) + \frac{1}{2}\cdot e^{(\alpha-\beta i)x}(P_m(x) - iQ_l(x));$$

далее можно отдельно воспользоваться результатами п. 2 для $\frac{1}{2}\cdot P_m(x)(e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x})$ и $\frac{1}{2}\cdot Q_l(x)(e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x})$; получим, что, если $(\alpha + \beta i)$ не является корнем $F(x)$, то $y_s = e^{\alpha x}(R_p(x)\cos\beta x + T_p(x)\sin\beta x)$, где $p = \max\{m, n\}$, а R_p, T_p – многочлены степени p. Если же $\alpha + \beta i$ – корень $F(x)$ кратности r, то $y_s = x^r e^{\alpha x}(R_p \cos\beta x + T_p \sin\beta x)$.

Замечание (принцип суперпозиции): пусть $L_i y = y^{(n)} + a_{1i} y^{(n-1)} + \ldots + a_{ni} y = f_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ – линейные неоднородные диф. уравнения, а $\varphi_i(x)$ – их решения; тогда $\forall\ \alpha_1, \ldots \alpha_m \in \mathbb{R}$ функция $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$ будет решением уравнения $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i L_i\right) y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$. Таким образом, частное решение уравнения со сложной правой частью может быть найдено в виде линейной комбинации решений с более простыми правыми частями.

Метод вариации произвольных постоянных: пусть $\{y_1, \ldots y_n\}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)$. Будем искать $y_s=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k(x)y_k$; тогда $y'_s=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k(x)y'_k+\sum\limits_{k=1}^{n}C'_k(x)y_k$; выберем $C_1(x),\ldots C_k(x):\ \sum\limits_{k=1}^{n}C'_k(x)y_k=0\Rightarrow y''_s=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k(x)y''+\sum\limits_{k=1}^{n}C'_k(x)y'_k$. Аналогично выберем $C_1(x),\ldots C_n(x):\ \sum\limits_{k=1}^{n}C'_k(x)y'_k=0$. Проводя аналогичные операции, получим, что, если $C'_1(x),\ldots C'_n(x)$ являются решениями однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1+\ldots+C'_n(x)y_n=0\\ C'_1(x)y'_1+\ldots+C'_n(x)y'_n=0\\ \vdots\\ C'_n(x)y_k^{(n-1)}+\ldots+C'_n(x)y_n^{(n-1)}=f(x), \end{cases}$$

то $y_s=\sum\limits_{i=1}^{n}C_k(x)y_k(x)$ будет решением неоднородного дифференциального уравнения. Определителем системы является $W(y_1\ldots y_n)\neq 0$ (система функций $\{y_1,\ldots y_n\}$ линейно независима), поэтому система имеет невырожденное решение $C'_1(x),\ldots C'_n(x)$. Таким образом, поиск частного решения сводится к решению системы линейных уравнений на $C'_k(x)$ и последующему интегрированию решений.

Метод Коши: позволяет решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)$ с начальными условиями $y'(x_0)=y''(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)$. Выберем произвольное решение однородного уравнения и примем константы $C_1,\ldots C_n$ зависящими от переменной s; тогда можно построить *функцию Коши* $K(x,s):\ K(s,s)=K'(s,s)=\ldots=K^{(n-2)}(s,s)=0,\ K^{(n-1)}(s,s)=1$. Выберем $y_s=\int\limits_{x_0}^{x}K(x,s)f(s)ds$ и покажем, что эта функция является частным решением.

$$y'_s=K(x,x)f(x)+\int\limits_{x_0}^{x}K'_x(x,s)f(s)ds=\int\limits_{x_0}^{x}K'_x(x,s)f(s)ds\ (K(x,x)=0\ \forall\ x\in\mathbb{R};$$

аналогично

$$y''_s=\int\limits_{x_0}^{x}K''_{xx}(x,s)f(s)ds,\ldots y^{(n-1)}=\int\limits_{x_0}^{x}K^{(n-1)}_{x\ldots x}(x,s)f(s)ds,\ y_s^{(n)}=f(x)+\int\limits_{x_0}^{x}K^{(n)}_{x\ldots x}(x,s)f(s)ds.$$

При подстановке в исходное уравнение интегралы дадут ноль ($K(x,s)$ – общее решение однородного уравнения); останется $f(x)$, то есть y_s действительно является частным решением.

2.4. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Будем рассматривать уравнения вида $y''+p(x)y'+q(x)=0$, где p и q – функции, аналитические на $\mathbb{R}$ (в данном случае будем называть *аналитической* на $E\subseteq\mathbb{R}$ функцию f, представимую на E в виде суммы степенного ряда – необходимым условием возможности такого представления является $f\in C^\infty(E)$; однако, согласно результатам комплексного анализа (см. ТФКП, 2.5), достаточно более слабого условия $f\in D(E)$).

Замечание: если $p(x)$ и $q(x)$ – функции, аналитические на $\mathbb{R}$, то и всякое решение уравнения $y''+py'+q=0$ будет аналитической функцией на $\mathbb{R}$ (непосредственно следует из теоремы 5 (1.1)).

Сделаем *замену Лиувилля* $y = v\exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi$; тогда

$$y' = \exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi \left(v' - \frac{1}{2}pv\right),\ y'' = \exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi \left(v'' + 2v'\left(-\frac{1}{2}p\right) - \frac{1}{2}vp' + \frac{1}{4}vp^2\right).$$

Подствив в уравнение, получим $v'' - \frac{1}{2}vp' - \frac{1}{4}vp^2 + qv = 0$, то есть $v'' + \nu(x)v = 0$.

Преобразуем начальные условия на y в начальные условия на v: $v(x_0) = a_0,\ v'(x_0) = a_1$. $\nu(x)$ – аналитическая на $\mathbb{R}$, поэтому, согласно замечанию, v также аналитическая на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $v_0(x) = a_0 + a_1(x - x_0),\ v_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x}(\xi - x)\nu(x)v_{n-1}(\xi)d\xi,\ v(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$. Покажем, что такой функциональный ряд сходится, а его сумма удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению: для этого сначала докажем, что $\forall\ x \in \mathbb{R}\ |v_n(x)| \leq$ $\leq \frac{\mu}{n!}M^n(x-x_0)^{2n}$, используя метод математической индукции ($\mu = |v_0(x)|,\ M = \sup\limits_{[x_0,x]}|\nu(\xi)|$). Очевидно, $|v_0(x)| \leq \mu$; предположим, что $|v_m(x)| \leq \frac{\mu}{m!}M^m(x - x_0)^{2m}$; тогда

$$|v_{m+1}(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x}(\xi - x)\nu(x)v_m(\xi)d\xi\right| \leq M\left|\int\limits_{x_0}^{x}(\xi - x)\cdot\frac{\mu}{m!}M^m(\xi - x_0)^{2m}d\xi\right| =$$
$$= \frac{\mu}{m!}M^{m+1}\cdot\frac{|x - x_0|^{2m+2}}{2m+2} \leq \frac{\mu}{(m+1)!}M^{m+1}|x - x_0|^{2m+2}.$$

Таким образом, функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ ограничен сврху степенным рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $a_{2k} = \frac{\mu}{k!}M^k$. По формуле Д'Аламбера (см. математический анализ, 5.2.3),

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu\left(\frac{n}{2}+1\right)!M^{\frac{n}{2}}}{\mu\left(\frac{n}{2}\right)!M^{\frac{n}{2}+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k}{2}+1}{M} = \infty$$

– радиус сходимости степенного ряда. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и $\exists\ v(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$. $v_n' = (x - x)\nu v_{n-1} + \int\limits_{x_0}^{x}(-1)\nu(\xi)v_{n-1}(\xi)d\xi = -\int\limits_{x_0}^{x}\nu(\xi)v_{n-1}(\xi)d\xi \Rightarrow v_n'' =$ $-\nu v_{n-1}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k''(x)$ сходится равномерно, а $v \in C^2(\mathbb{R}),\ v'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k''(x) =$ $-\nu(x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{k-1}(x) = \nu(x)v(x) \Rightarrow v'' + \nu v = 0$, то есть $v(x)$ действительно является решением диф. уравнения.

Покажем, что решение, найденное таким способом, единственно: пусть существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$, удовлетворяющие одинаковым начальным условиям $u_1(x_0) =$ $u_2(x_0) = a_0,\ u_1'(x_0) = u_2'(x_0) = a_1$. Рассмотрим функцию $w = u_1 - u_2$, также являющуюся решением ($w(x_0) = w'(x_0) = 0$). $w'' + \nu w = 0 \Rightarrow w''' + \nu' w + \nu w' = 0$; подставив значения в точке x_0, получим $w''(x_0) = w'''(x_0) = 0$; аналогично $w^{(4)}(x_0) = \ldots = 0$, то есть все коэффиценты Тейлора для w в точке x_0 равны нулю, а значит $w \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$.

Пример (уравнение Эйри): $y'' - xy = 0$.

Будем искать решение в виде аналитической функции, то есть $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^k \Rightarrow$ $y' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{k+1}(k+1)x^k,\ y'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$. Подставив в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1}x^k = 0 = 2A_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_{k+2}(k+2)(k+1) - A_{k-1})x^k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = 0,\ A_{k+2} = \frac{A_{k-1}}{(k+2)(k+1)}.$$

Таким образом, $A_2 = A_5 = A_8 = \ldots = 0$. Коэффициенты A_0 и A_1 определяются начальными условиями и позволяют найти $A_{3k},\ A_{3k+1}$. Пусть, например,

$$y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0 \Rightarrow A_{3k} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k} 3i(3i-1)},\ A_{3k+1} = 0.$$

Тогда $y(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{3k}}{\prod\limits_{i=1}^{k} 3i(3i-1)}$.

Рассмотрим теперь более сложный случай – уравнения вида $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$, где p и q – аналитические функции (к такому виду может быть приведено уравнение $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, где функции p_1 (q_1) имеют в некоторой точке x_0 полюс первого (второго) порядка (это означает, что функции $xp_1(x)$ ($x^2q_1(x)$) могут быть разложены в степенной ряд в точке x_0, подробнее см. ТФКП, 3.3)). Будем искать решение в виде обобщённого степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha}$ $(\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)A_k x^{k+\alpha-1},\ y'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)A_k x^{k+\alpha-2}$. Подставляя в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)A_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)A_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha} = 0.$$

Обозначим $f_0(\alpha) = \alpha(\alpha-1)+p_0\alpha+q_0,\ f_k(\alpha) = p_k\alpha+q_k$ и приравняем коэффициенты при x^α: $\alpha(\alpha-1)A_0+p_0\alpha A_0+q_0A_0 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1)+\alpha p_0+q_0 = 0$ – квадратное уравнение относительно α, имеющее два корня: α_1 и α_2. Приравняв коэффициенты при других степенях x, получим рекуррентную формулу на коэффициенты A_k: $f_0(k+\alpha)A_k + f_1(k+\alpha-1)A_{k-1} + \ldots = 0$, позволяющую найти A_k с помощью α_1 (α_2) и начальных условий.

Однако решения, найденные таким способом, могут оказаться линейно зависимыми – в случае $\alpha_1 - \alpha_2 = s \in \mathbb{Z}$ (так называемый *резонансный* случай); для того, чтобы получить фундаментальную систему решений, воспользуемся формулой Остроградского-Лиувилля (см. 2.1): если y_1 – решение, найденное с помощью α_1, то

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{\exp\left(-\int \frac{p(\xi)d\xi}{\xi}\right)}{y_1^2} = \int e^{-p_0 \ln x} \cdot \exp\left(-\int \sum_{k=1}^{\infty} p_k \xi^{k-1} d\xi\right) \cdot \frac{dx}{y_1^2} =$$

($\alpha_1,\ \alpha_2$ удовлетворяют квадратному уравнению $\alpha_2 + (p_0-1)\alpha + q_0 = 0$, поэтому, по теореме Виета, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - p_0 \Rightarrow -p_0 = -1 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 - s + 2\alpha_1$)

$$= \int \exp\left(-\int \sum_{k=1}^{\infty} p_k \xi^{k-1} d\xi\right) \cdot \frac{x^{-1-s}x^{2\alpha_1}dx}{y_1^2} =$$

(интеграл и экспонента от аналитической функции являются аналитическими функциями, $y_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha_1}$, поэтому подинтегральные сомножители дадут в итоге аналитическую функцию)

$$= \int x^{-1-s}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} g_k x^k\right)dx = \frac{x^{-s}}{-s} + g_s \ln x + \sum_{k=1}^{s-1} g_k \cdot \frac{x^{k-s}}{k-s} + \sum_{k=s+1}^{\infty} g_s \cdot \frac{x^{k-s}}{k-s} =$$
$$= g_s \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} g'_k x^{k-s},$$

где $g'_0 = -\dfrac{1}{s},\ g'_s = 0,\ g'_k = g_k\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ k \neq s$. Таким образом, $y_2 = g_s \ln x \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha+1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^k \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} g'_k x^{k+\alpha_2}$. В конечном счёте получим следующее решение ($\varphi(x), \psi(x)$ – аналитические функции):

Нерезонансный случай: $y_1 = x^{\alpha_1}\varphi,\ y_2 = x^{\alpha_2}\psi$;

Резонансный случай: $y_1 = x^{\alpha_1}\varphi,\ y_2 = g_s x^{\alpha_1}\varphi + x^{\alpha_2}\varphi\psi$.

Пример (уравнение Бесселя): $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ($n \in \mathbb{R}$).

Сделаем замену Лиувилля

$$y = v \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}\right) = \frac{v}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^2v'' + \left(x^2 + \left(\frac{1}{4} - n^2\right)\right)v = 0.$$

При $n = \pm\dfrac{1}{2}$ получим $v'' + v = 0 \Rightarrow v(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x \Rightarrow y(x) = \dfrac{C_1}{\sqrt{x}}\cos x + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}}\sin x$.
При $n \neq \pm\dfrac{1}{2}$ будем искать решение в виде обобщённого степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha}$.
Уравнение на α имеет вид $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm n;\ f_0(\alpha) = \alpha^2 - n^2,\ f_1 \equiv 0,\ f_2 \equiv 1,\ f_3 \equiv \ldots \equiv 0$, поэтому

$$A_k((k+\alpha^2) - n^2) + A_{k-2} = 0 \Rightarrow (\alpha = n)\ A_k = -\frac{A_{k-2}}{k(k+2n)},$$
$$A_{2k} = \frac{(-1)^k A_0}{2^{2k}\cdot k!(n+1)\ldots(n+k)},\ A_{2k+1} = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, одно из решений найдено; в нерезонансном случае можно аналогично найти второе, линейно независимое решение, то есть и общее решение; в резонансном случае следует применить формулу Остроградского-Лиувилля. Однако оказывается, что в некоторых случаях решения уравнения Бесселя имеют особое значение для математики. Рассмотрим $A_0 = \dfrac{1}{2^n \cdot \Gamma(n+1)} \Rightarrow A_{2k} = \dfrac{(-1)^k \cdot \Gamma(n+1)}{2^{2k}\cdot k! \cdot \Gamma(n+k-1)}A_0$; решение

$$y = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(n+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

называется *функцией Бесселя первого рода*. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то функции Бесселя J_n и J_{-n} представляют собой два линейно независимых решения уравнения Бесселя. При $n \in \mathbb{Z}$ второе линейно независимое решение $Y_n(x)$ может быть найдено по формуле Остроградского-Лиувилля и носит название *функции Бесселя второго рода*. Функции Бесселя относятся к специальным функицям математики и иногда называются также *цилиндрическими*.

Замечание: $\forall\ n \in \mathbb{Z}\ J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

$\triangle$ Пусть $n > 0$ (при $n = 0$ утверждение очевидно, а при $n < 0$ сводится к доказанному заменой $k = -n$). $J_{-n}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$ (суммирование начинается с n, поскольку при $k < n$ аргумент Γ-функции отрицателен, и соответствующие члены обращаются в ноль). $l = k - n \Rightarrow J_{-n}(x) = (-1)^n \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+n)! \cdot \Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \cdot \Gamma(n+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x)$ (здесь было использовано одно из основных свойств Γ-функции: $\Gamma(n+1) = n!\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ – см. математический анализ, 6.3.2). $\blacksquare$

Теорема 1: $xJ_{n+1}(x) = nJ_n(x) - xJ_n'(x)$.

$$\triangle\ \frac{d}{dx}\frac{J_n}{x^n} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^{2k+n} \cdot \Gamma(n+k+1)} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2k}{k! \cdot 2^{2k+n} \cdot \Gamma(n+k+1)} x^{2k-1} =$$

$$= \text{(заменим индекс суммирования на } k-1\text{)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k! \cdot 2^{2k+n+1} \cdot \Gamma(n+k+2)} x^{2k+1} =$$

$$= \frac{-1}{x^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(n+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1+n} = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n};$$

но, с другой стороны,

$$\frac{d}{dx}\frac{J_n}{x^n} = \frac{J_n' x^n - nJ_n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{J_n'}{x^n} - \frac{nJ_n}{x^{n+1}} = -\frac{J_{n+1}}{x^n} \Rightarrow xJ_{n+1} = nJ_n - xJ_n'. \blacksquare$$

Теорема 2 (без доказательства): функции $J_n(x)$ имеют бесконечное число нулей при любых значениях n, причём между любыми "соседними"нулями J_n находится ровно один ноль функции J_{n+1}. Также при $x \to \infty$ выполняются асимптотические формулы

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right),\ J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left(\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right).$$

3. Системы дифференциальных уравнений.

3.1. Общие принципы решения.

Будем рассматривать только системы уравнений первого порядка, то есть соотношения вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots x_n, t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots x_n, t) \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема 1 (без доказательства): $\Pi = \{(t, x_1, \dots x_n) |\ |t - t_0| \le a,\ |x_j - x_j^0| \le b\ \forall\ j = \overline{1, n}\}$; если в системе (1) $f_i \in C(\Pi)\ \forall\ i = \overline{1, n}$ и $\forall\ (t, x_1, \dots x_n),\ (t, z_1, \dots z_n) \in \Pi\ |f_i(t, x_1, \dots x_n) - f_i(t, z_1, \dots z_n)| \le L \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - z_k|\ \forall\ i = \overline{1, n}$, то при заданном начальному условии $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x_0}$ существует ровно одно решение системы (1), удовлетворяющее этому условию.

Определение: пространство $(x_1, \dots x_n)$ называется *фазовым пространством* системы дифференциальных уравнений (в более общем случае фазовым пространством называется пространство $(x_1, \dots x_n, x'_1, \dots x'_n)$, однако в нашем случае систем диф. уравнений первого порядка n координат такого $2n$-мерного пространства оказываются вырожденными, что позволяет рассматривать только сечение $(x_1, \dots x_n)$ фазового пространства). Кривые, заданные на фазовом пространстве решениями $\overrightarrow{x}(t)$, называются *фазовыми траекториями* системы.

Теорема 2: в условиях теоремы 1 фазовые траектории системы диф. уравнений первого порядка не пересекаются.

$\triangle$ Пусть t_0 – точка пересечения фазовых траекторий, соответствующих решениям $\overrightarrow{x_1},\ \overrightarrow{x_2}$; тогда $\overrightarrow{x_1}(t_0) = \overrightarrow{x_2}(t_0)$, то есть двум различным решениям соответствует одно начальное условие, что невозможно согласно теореме 1. Таким образом, фазовые траектории не пересекаются. $\blacksquare$

Метод редукции: для решения системы $\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$ продифференцируем первое уравнение по x. Тогда $x'' = f'_t + f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' = f'_t + f'_x \cdot x' + f'_y \cdot g(t, x, y)$; если выполняются условия теоремы о неявной функции, то можно найти $y = \varphi(x, x', t)$ и, подставив в первое уравнение системы, получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно x. Очевидно, тот же способ можно применять и для случая большего числа уравнений, что, однако, приведёт к уравнению высокого порядка на x.

Более простое решение возможно в случае системы линейных дифференциальных уравнений, то есть системы вида $\dfrac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \mathbb{A} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{F}$. Рассмотрим вначале случай однородной системы уравнений (то есть $F \equiv 0$): очевидно, достаточно найти n линейно независимых решений такой системы, а затем заметить, что всякая линейная комбинация этих решений также будет являться решением системы (это легко показать, проводя действия, аналогичные тем, что были осуществлены в 2.1). Для поиска линейно независимых решений представим $\overrightarrow{x}$ в виде $\overrightarrow{x} = e^{kt} \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{x'} = k\overrightarrow{x},\ k\overrightarrow{x'} = \mathbb{A} \cdot \overrightarrow{x} \Rightarrow (\mathbb{A} - k\mathbb{E})\overrightarrow{x} = 0$. Таким образом, задача свелась к нахождению собственных значений матрицы $\mathbb{A}$, а решения $\overrightarrow{x}$ являются её собственными векторами. В случае $\operatorname{rank} \mathbb{A} = n$ матрица имеет n линейно независимых собственных векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_n}$, а решение запишется как $\overrightarrow{x} = C_1 e^{k_1 t} \cdot \overrightarrow{a_1} + \dots + C_n e^{k_n t} \cdot \overrightarrow{a_n}$ (если среди собственных чисел есть комплексные (а точнее – пары комплексно сопряжённых чисел $(\alpha_{i_1} = \overline{\alpha_{i_2}})$, являющихся корнями характеристического многочлена $\mathbb{A}$), то, дабы сделать их "вклад" в решение действительным, следует брать $C_{i_1}\cdot\mathrm{Re}(e^{\alpha_{i_1}t}\overrightarrow{a_1})+C_{i_2}\cdot\mathrm{Im}(e^{\alpha_{i_2}t}\overrightarrow{a_2})=C_{i_1}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,a_{11}\\ \mathrm{Re}\,a_{12}\end{pmatrix}\cos\alpha_{i_1}t+C_{i_2}\begin{pmatrix}\mathrm{Im}\,a_{21}\\ \mathrm{Im}\,a_{22}\end{pmatrix}\sin\alpha_{i_2}t)$. Если же $\operatorname{rank}\mathbb{A}<n$, то кратность некоторых собственных чисел $\mathbb{A}$ отлична от единицы; для такх собственных чисел в решение входят члены вида $\begin{pmatrix}\gamma_1+\beta_1 t\\ \gamma_2+\beta_2 t\end{pmatrix}\cdot e^{\alpha t}$; очевидно, составляющие этого решения $\overrightarrow{c_1}e^{\alpha t}$ и $\overrightarrow{c_2}te^{\alpha t}$ линейно независимы.

В случае неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений общее решение (как и для одного уравнения – см. 2.3) может быть представлено в виде общего решения соответствующей системы однородных уравнений и частно решения системы неоднородных уравнений; применимы как непосрдественный поиск частных решений, так и метод вариации постоянных – см. 2.3.

3.2. Особые точки системы дифференциальных уравнений.

Определение: *положением равновесия* (*особой точкой*) системы дифференциальных уравнений называется точка, в которой $x'=y'=0$. Положение равновесия (x_0,y_0), достигаемое в точке t_0 называется *устойчивым* (по Ляпунову), если $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0:\;\forall\,t_1:\;|t_1-t_0|<\delta,\;\forall\;t>t_1\;|x(t)-x_0|<\varepsilon,\;|y(t)-y_0|<\varepsilon$ (следует иметь в виду, что есть и другие определения устойчивости – не только по Ляпунову).

Будем рассматривать только случай системы двух линейных однородных уравнений; это позволит описать основные типы особых точек и те случаи, в которых они возникают: пусть система имеет вид

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y\\ y'=a_{21}x+a_{22}y;\end{cases}\quad\text{сначала исследуем случай}\quad\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

λ_1,λ_2 – собственные числа матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

I. $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R};\;\lambda_1\neq\lambda_2$ – решение имеет вид

$$\begin{cases} x=C_1\alpha_1e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_1e^{\lambda_2 t}\\ y=C_1\alpha_2e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_2e^{\lambda_2 t}.\end{cases}$$

1) $\lambda_1,\lambda_2<0\Rightarrow x,y\to 0,\;t\to+\infty;\;x,y\to\infty,\;t\to-\infty$ – такой тип особой точки называется *узлом*; $e^{\lambda_1 t},\;e^{\lambda_2 t}\downarrow$, то есть решения стремятся к положению равновесия – точке (0,0); это *устойчивый узел.*

2) $\lambda_1,\lambda_2>0\Rightarrow x,y\to\infty,\;t\to+\infty;\;x,y\to 0,\;t\to-\infty$ – это также узел, который, очевидно, является *неустойчивым.*

3) $\lambda_1\neq 0,\;\lambda_2=0\Rightarrow\begin{cases} x=C_1\alpha_1e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_1\\ y=C_1\alpha_2e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_2;\end{cases}$ Решения "подходят"к положению равновесия (точке (0,0)), но затем начинают от неё удаляться. При $\lambda_1>0$ и $\to-\infty$ решение стремится к прямой $y=\dfrac{\beta_2}{\beta_1}x$, а при $t\to+\infty$ – к прямой $y=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x$; в случае $\lambda_1<0$ реализуется обратный случай. Такая особая точка называется *седлом* и всегда является неустойчивой.

II. $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ $(\lambda_1,\lambda_2=p\pm qi,\;q\neq 0)$. Решение имеет вид

$$\begin{cases} x=e^{pt}(C_1\alpha_1\cos qt+C_2\alpha_1\sin qt)\\ y=e^{pt}(C_1\alpha_2\cos qt+C_2\alpha_2\sin qt).\end{cases}$$

1) $p<0:(x,y)\to(0,0),\;t\to+\infty$ ($e^{pt}\to 0$, а $C_1\cos qt+C_2\sin qt$ – периодическая и ограниченная функция); таким образом, решения имеют вид спиралей, сходящихся к

началу координат. Такая особая точка называется *фокусом*, который в данном случае устойчив.

2) $p > 0$ – решения имеют тот же вид, что и в предыдущем случае, однако $(x, y) \to \infty,\ t \to +\infty$, поэтому фокус является неустойчивым.

3) $p = 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 = \pm qi;$ $\begin{cases} x = \alpha_1(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \\ y = \alpha_2(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt). \end{cases}$ Решения периодичны, но траектории не сходятся к положению равновесия, а являются замкнутыми. Такая особая точка называется *центром* и, очевидно, является устойчивой.