Программа курса «Теория вероятностей», 211–212 группы, весна 2003

1. Правило умножения и правило сложения комбинаторики. Выборки из генеральной совокупности. Выборки упорядоченные и неупорядоченные, с возвращением и без возвращения. Размещения частиц (различимых и неразличимых) по различным неупорядоченным ячейкам (с запретом и без запрета). Подсчёт их количества.

2. Множество. Подмножество. Множество всех подмножеств. Операции над множествами и их свойства. Примеры.

3. Отображения множеств. Образ и прообраз. Полный прообраз. Эквивалентность множеств. Счётные и континуальные множества. Примеры. Алгебра и σ-алгебра множеств. Примеры.

4. Разбиение множества. Число разбиений конечного множества на заданное число подмножеств с фиксированным числом элементов в каждом подмножестве.

5. Случайный эксперимент. Стохастическая устойчивость частот. Формализация вероятностной задачи. Вероятностное пространство. Дискретные и произвольные пространства элементарных исходов. Примеры. Случайные события. Операции над событиями. Связь между вероятностной и теоретико-множественной терминологиями. Алгебра и σ-алгебра событий. Примеры.

6. Вероятность (вероятностная мера) в дискретном пространстве элементарных исходов. Аксиомы. Примеры задания вероятности в дискретном пространстве элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Теорема сложения и её обобщения. Примеры.

7. Произвольное пространство элементарных исходов. Вероятность (вероятностная мера) в таком пространстве. Аксиомы теории вероятностей, аксиома непрерывности. Геометрические вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности, вытекающие из аксиом.

8. Условные вероятности. Теорема умножения. Независимость событий. Независимость событий в совокупности. Примеры. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.

9. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Вероятностное пространство для схемы Бернулли. Последовательность независимых испытаний с $N > 2$ исходами (полиномиальная схема).

10. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная предельная теорема Муавра (без доказательства). Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа (без доказательства). Примеры применения теорем.

11. σ-алгебры числовых множеств на $\mathbb{R}$ (борелевские алгебры). Случайная величина (определения). Функция распределения. Распределение вероятностей. Свойства функции распределения (поведение в бесконечности и непрерывность слева – без доказательства). Индуцированное вероятностное пространство.

12. Дискретные случайные величины (распределения). Функция распределения. Примеры: вырожденное, дискретное равномерное, бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое распределения; распределение Паскаля. Содержательный смысл указанных распределений. Предельные значения для гипергеометрических вероятностей.

13. Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения). Функция распределения. Плотность распределения. Примеры: равномерное распределение на отрезке, нормальное распределение с параметрами (a, σ), стандартное нормальное распределение, показательное распределение (свойство отсутствия последействия), распределение Коши. Содержательный смысл указанных распределений.

14. Многомерные распределения. Функция распределения случайного вектора и её свойства (без доказательства). Дискретные и абсолютное непрерывные многомерные распределения. Плотность распределения. Примеры: равномерное распределение на плоскости, двумерное нормальное распределение, дискретное распределение на конечном множестве точек плоскости. Связь маргинальных (одномерных) распределений с совместным распределением. Примеры. Условные распределения.

15. Независимость случайных величин (определения). Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин (без доказательства).

16. Функции (борелевские) от случайных величин. Преобразование n-мерного случайного вектор в m-мерный. Пример: нахождение плотности распределения квадрата нормальной стандартной случайной величины. Формула композиции (свёртка). Распределение суммы двух независимых нормально распределённых случайных величин. Пример: нахождение плотности суммы двух независимых величин, одна из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[-0.5h, 0.5h]$ ($h > 0$), а вторая – нормальное распределение с параметрами (a, σ).

17. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание. Формулы для вычисления математического ожидания функций от случайных величин. Свойства математического ожидания. Вычисление математического ожидания биномиальной и гипергеометрической случайных величин с помощью их представления в виде сумм бернуллиевских случайных величин. Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Их свойства. Дисперсия линейной комбинации n произвольных случайных величин. Примеры. Связь между независимостью и некоррелированностью. Примеры.

18. Неравенства Маркова и Чебышева. Примеры применения неравенства Чебышева: оценка вероятности успеха в схеме Бернулли по частоте, оценка доли брака в партии изделий по доле брака в контрольной выборке. Сходимость по вероятности. Закон больших числе. Теоремы Маркова, Чебышева и Бернулли. Примеры.

19. Сходимость по распределению (слабая сходимость). Центральная предельная теорема (различные достаточные условия выполнения теоремы – без доказательства). Примеры применения. Понятие асимптотической нормальности. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как частный случай центральной предельной теоремы.

20. Элементы математической статистики: выборка из распределения $F(x)$; эмпирическая функция распределения; оценка (статистика); несмещенность и состоятельность оценок; метода получения оценок; доверительные интервалы; распределения χ^2 и Стьюдента; критерии согласия (χ^2 и Колмогорова); доверительные интервалы; точные выборочные распределения; различение гипотез; критерий Неймана-Пирсона; задача регрессии, метод наименьших квадратов.