

**Конспект лекций по математическому анализу. 3 семестр, лектор
Ю.Н. Макаров.**

Лекции 1,2

Ряды. Дифференциальные уравнения.

Ряды.

Примеры рядов.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{Гармонический ряд}$$

$$\xi(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots \quad \text{Дзета функция Римана.}$$

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Числовой ряд — бесконечная упорядоченная сумма чисел.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$\{A_n\}$ — последовательность частичных сумм.

Числовой ряд A сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ — сумма сходящегося числового ряда.

Если $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, то ряд A расходится.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \quad (\text{расходится к бесконечности})$$

В целом различают несколько основных типов задач:

- 1) Исследование сходимости ряда.
- 2) Нахождение суммы.
- 3) Разложение данной функции в ряд.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Например.

Критерий Коши сходимости ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$, такое что $\forall n > m \geq n_0: |A_n - A_m| < \varepsilon$.

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$A_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \text{ следовательно } A_n - A_m = a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \text{ такое что } \forall n > m \geq n_0 \Rightarrow |a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$

Тогда говорят, что последовательность A_n — фундаментальна.

Пример

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{Гармонический ряд.}$$

Зафиксируем $\varepsilon = 0.5$, $m \geq n_0$, $n = 2m$

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} > m * \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

Всего m слагаемых

$|a_n| < \varepsilon \sim \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ — необходимый признак сходимости числового ряда.

Д-во: $n = m+1 \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \Rightarrow \forall n \geq n_0:$

Следствие 1 $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\exists n_1: \forall n \geq n_1 \Rightarrow a_n = b_n$$

Тогда $A \sim B$ (либо оба сходящиеся либо оба расходящиеся)

$$n_0 \geq n_1 \quad |a_{m+1} + \dots + a_n| = |b_{m+1} + \dots + b_n|$$

Следствие 2

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n = k a_n, \quad n \geq 1, \quad k \neq 0, \text{ тогда } A \sim B$$

Следствие 3 Если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. При этом говорят, что

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad a_n > 0$$

Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Признаки сравнения.

$$a) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\begin{cases} 0 < a_n \leq b_n \\ B \text{---сход.} \Rightarrow A \text{---сходится} \end{cases}$$

Для доказательства применим критерий Коши:

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \leq b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n < \varepsilon$$

б) предельный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k, k > 0 \Rightarrow A \sim B$$

Доказательство: из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ следуют неравенства:

$$\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < k+1, n \geq n_0$$

$$\frac{kb_n}{2} < a_n < (k+1)b_n \text{ тогда по признаку сравнения (а) } A \sim B$$

Пример. $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, рассмотрим как ведёт себя этот ряд в зависимости от α . При

$\alpha=1$ ряд расходится (гармонический). (Было доказано ранее).

Для $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ расходится по признаку сравнения а.

Для $\alpha > 1$

$$\int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha} > \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{тогда по теореме о среднем выполняются неравенства}$$

$$\frac{1}{n^\alpha} < \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{n-1}^n = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

$$\text{Пусть } B = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

$$B_n = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}} \right) + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = 1, \text{ т.е. } B \text{---сходится, значит по признаку сравнения ряд } \zeta(\alpha) \text{ при } \alpha > 1$$

то же сходится.

Таким образом

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \alpha \leq 1 \text{ расходится} \\ \alpha > 1 \text{ сходится} \end{cases}$$

в) признак Деламбера

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, $a_n > 0$, $n=1,2,3 \dots$, Тогда:

$\lambda < 1 \Rightarrow A$ сходится

$\lambda > 1 \Rightarrow A$ расходится

$\lambda = 1 \Rightarrow$ вопрос о сходимости остаётся открытым

Д-во

1) $\lambda < 1$, $\lambda + \varepsilon < 1$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} < \lambda + \varepsilon$, $n \geq n_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_n}{a_{n-1}} < \lambda + \varepsilon \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < \lambda + \varepsilon \\ \dots \dots \dots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \lambda + \varepsilon \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Перемножая все эти неравенства получим: } \frac{a_n}{a_{n_0}} < (\lambda + \varepsilon)^{n-n_0} \\ \\ \text{значит } a_n < c(\lambda + \varepsilon)^n, n > n_0 \\ \\ \text{т.к. } \lambda + \varepsilon < 1 \text{ то ряд сходится (по признаку сравнения).} \end{array}$$

2) $\lambda > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n$ не стремится к нулю $\Rightarrow$ ряд расходится. Т.к не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Признак Коши (радикальный).

Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ тогда при $\lambda < 1$ A сходится, $\lambda > 1$ A расходится, при $\lambda = 1$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Д-во

1) $\lambda < 1$

Выберем ε : $\varepsilon = 1 - \lambda < 1$ тогда из определения предела:

$\lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon, n \geq n_0$, значит $a_n < (\lambda + \varepsilon)^n$, $n \geq n_0$ получена геометрическая прогрессия с $q < 1$ следовательно, ряд сходится ($q = \lambda + \varepsilon$).

2) $\lambda > 1$

$$\sqrt[n]{a_n} > 1, n \geq n_0$$

$a_n > 1$, $n \geq n_0$ значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, следовательно, не выполнен необходимый признак сходимости числового ряда.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

ряд сходится (по Деламберу)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1 \Rightarrow$$

Признак сравнения 3.

Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n > 0$, $b_n > 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq 1$$

тогда $A \sim B$

Д-во:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{b_{n-1}}{b_n} \\ \dots \dots \dots \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{После почленного перемножения получим:} \\ \frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \\ a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \end{array}$$

так как $a_1/b_1 = \text{const}$, и B сходится, то и A сходится.

Признак Куммера.

Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ ($\forall n \geq n_0$), и $\{b_n\}$ последовательность чисел, $b_n > 0$ такая, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}) = \delta$. Тогда если $\delta > 0$ то ряд A сход., если

$\delta < 0$ то ряд A расходится, если $\delta = 0$, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Д-во.

1) $\delta > 0$, выберем $\varepsilon = \delta/2$ тогда, по определению предела

$$b_n * a_n / a_{n+1} - b_{n+1} > \delta - \varepsilon = \delta/2 \quad \forall n \geq n_0$$

обозначим $c_n = a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} > \delta * a_{n+1} / 2$

и докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, так как $c_n = a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} = \delta * a_{n+1} / 2 > 0$, то

$$a_n b_n > a_{n+1} b_{n+1} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n, \text{ так как } \{a_n b_n\} \text{ монотонно убывающая, ограниченная}$$

нулём послед..

$$S_n = c_1 + \dots + c_n = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \dots + (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

значит ряд c_n сходится, $\delta a_{n+1} / 2$ тоже сходится (по признаку сравнения) т.к.

$\delta/2 = \text{const}$, то и исходный ряд сходится $\Rightarrow A$ сходится.

2) $\delta < 0$ тогда,

$$b_n * a_n / a_{n+1} - b_{n+1} < 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{(1/b_n)} \quad \forall n \geq n_0, \text{ значит}$$

по условию ряд $1/b_n$ — расходится, а значит по признаку сравнения $\sum$ расходится и исследуемый ряд A .

Следствие 1 (признак Деламбера).

Возьмём $b_n = 1$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \delta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \delta} = \lambda \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \delta + 1$$

Если $\delta > 0$, то $\lambda < 1$ и ряд A сходится.

$\delta < 0$, то $\lambda > 1$ и ряд A расходится.

Следствие 2 (признак Раабе)

Пусть $b_n = n$

$$n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n = \delta + 1 + o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \delta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \right) = \delta$$

обозначим $\alpha = \delta + 1$, тогда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \alpha/n + o(1/n)$, значит при $\alpha > 1$ ($\delta > 0$) ряд сходится,

при $\alpha < 0$ ($\delta < -1$) рас.

Следствие 3.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_n, \quad |\varepsilon_n| < \frac{c}{n^2} \Rightarrow A \text{ - расходится.}$$

Применим к исслед. ряду признак Куммера ($b_n = n \cdot \ln(n)$ (доказательство расходимости данного ряда см. ниже). Тогда

$$b_n a_n / a_{n+1} - b_{n+1} = n \ln(n) \cdot (1 + 1/n + \varepsilon_n) - (n+1) \ln(n+1) = (n+1)(\ln(n) - \ln(n+1)) + n \ln(n) \cdot \varepsilon_n = \\ = -n \ln(1 + 1/n) - \ln(1 + 1/n) + n \ln(n) \cdot \varepsilon_n \rightarrow -1, \text{ т.к. первое из слагаемых стремится (при } n \text{ стремящемся к бесконечности) к } -1, \text{ второе к } 0, \text{ и } 3 \text{ к нулю (т.к. } \ln n / n \rightarrow 0 \text{).}$$

Признак Гаусса

Пусть $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \beta + \frac{\alpha}{n} + \varepsilon_n, \quad |\varepsilon_n| < \frac{c}{n^2}$, важно, что бы остаток был именно в таком виде.

Тогда,

- 1) $\beta < 1$ A — расх.
- 2) $\beta > 1$ A — сход.
- 3) $\beta = 1$ $\alpha \leq 1$ A — расх.

$\alpha > 1$ A — сход. Доказательство следует из следствий 1-3.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{n!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+\alpha} = \frac{n+\alpha+1-\alpha}{n+\alpha} = 1 + \frac{1-\alpha}{n+\alpha} = 1 + \frac{1-\alpha}{n} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \frac{\alpha(\alpha-1)}{n(n+\alpha)}$$

$$1 - \alpha > 1 \sim \alpha < 0, \quad A \text{ — сход.}$$

$$1 - \alpha < 1 \sim \alpha > 0, \quad A \text{ — расх.}$$

При $\alpha = 0$ ряд состоит только из нулевых слагаемых, а следовательно сходится..

Интегральный признак. (Коши-Маклорена)

Пусть $f(x)$ - непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая функция, определенная при $x \geq 1$ (или начиная с некоторого $x > 0$). Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Д-во.

Лемма. Пусть $A_n = a_1 + \dots + a_n$ — частичная сумма. Тогда ряд сходится тогда, когда $A_n \leq c = \text{const}$. Эта лемма верна, так как в этом случае последовательность A_n убывающая и ограниченная.

Тогда $f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \dots + f(n-1)$, или

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}. \text{ Поэтому если } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ сходится, то}$$

$\exists c: \forall X \int_1^X f(x) dx \leq C$. Тогда $\forall n \quad S_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq C$ и $S_{n+1} \leq C + a_1, \Rightarrow$ ряд сходится.

Пусть теперь наоборот, известно, что ряд сходится. Тогда $\exists C: \forall n \quad S_n \leq C$. Взяв произвольное X выберем n так, чтобы $X \leq n+1$. Тогда

$$\int_1^X f(x) dx \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n \leq C. \text{ Значит, } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ сходится.}$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \Rightarrow \text{ряд сходится при } p > 1, \text{ и расходится при } p \leq 1.$$

Расходимость ряда $n \ln n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \sim \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \sim \int_2^{\infty} \frac{dt}{t} = |\ln x| \sim \int_2^{\infty} \frac{dt}{t} \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$