Лекция №3.

27.09.2002

Знакопеременные ряды

Пусть $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится то A также сходится и при этом говорят, что ряд A сходится **абсолютно**.

Если $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – расходится, то A сходится **условно**.

ПРИМЕР:

Ряд Лейбница: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$ сходится условно (неабсолютно), так как гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ расходится.

<u>Признак Лейбница.</u>

Пусть дан знакочередующийся ряд

$A=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n>0$ и $a_n\downarrow 0$ (монотонно стремится к 0), тогда A сходится.

<u>Доказательство.</u>

$A_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$, $A_{2n}=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\ldots+(-a_{2n-1}+a_{2n})$.

Т.к. $-a_1+a_2<0$, $-a_3+a_4<0$ ... $-a_{2n-1}+a_{2n}<0$ и

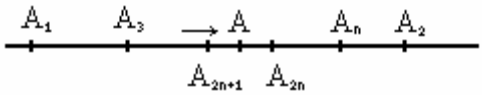
$$A_{2n+1}=-a_1+\underbrace{(a_2-a_3)}_{>0}+\ldots+\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{>0}.$$

$A_{2n+1}=A_{2n}+(-a_{2n+1}+a_{2n+2})<A_{2n}$, $A_{2n}\downarrow$, $A_{2n+1}\uparrow$, то есть последовательность частичных сумм A_{2n} убывает, а A_{2n+1} возрастает.

$$A_{2n}=-a_1+\underbrace{(a_2-a_2)}_{>0}+\ldots+\underbrace{(a_{2n-2}-a_{2n-1})}_{>0}+a_{2n}>-a_1 \Rightarrow \text{ограничена снизу} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_{2n}=A.$$

Каждая из последовательностей A_{2n} и A_{2n+1} ограничена и $A_{2n+1}-A_{2n}=-a_{2n+1}\to 0$.

Следовательно, $\exists \lim_{n\to\infty} A_n=A$.



$A_{2n} \downarrow$

$A_{2n+1} \uparrow$

Заметим, что:

$$|A_n - A| < |A_{n+1} - A_n| = a_{n+1}.$$

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$; $\quad 1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ сходится еще медленнее.

с точностью до a_{n+1}

ПРИМЕР (расходящийся знакочередующийся ряд):

$a_n \to 0$ не монотонно: $\quad 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$ – расходится.

Вообще, если ряд представим в виде суммы рядов:

1) Если оба ряда сходятся, то их сумма сходится.
2) Если один из рядов сходится, а другой расходится, то их сумма расходится.
3) Если оба ряда расходятся, то ничего определенного о сходимости суммы сказать нельзя.

(Соответствующие примеры рекомендуем придумать свмостоятельно).

Признак Дирихле.

Пусть дан ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$: $\quad$ 1) $|a_1 + \ldots + a_n| < C, \forall n$ $\quad$ 2) $b_n \downarrow 0$ (или $b_n \downarrow 0$) $\quad$ тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство.

По критерию Коши: $\forall e > 0 \exists n_0 : \forall m > n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| < e$.

$A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $\quad a_k = A_k - A_{k-1}$ по условию $|A_k| < C$.

Используя преобразование Абеля, получим неравенства:

$$\left|a_m b_m + a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_n b_n\right| =$$

$$= \left|b_m(A_m - A_{m-1}) + b_{m+1}(A_{m+1} - A_m) + b_{m+2}(A_{m+2} - A_{m+1}) + \ldots\right.$$

$$\left. + b_{n-1}(A_{n-1} - A_{n-2}) + b_n(A_n - A_{n-1})\right| =$$

$$= \left|- b_m A_{m-1} + (b_m - b_{m+1})A_m + (b_{m+1} - b_{m+2})A_{m+1} + \ldots + (b_{n-1} - b_n)A_{n-1} + b_n A_n\right| <$$

$$< b_m C + (b_m - b_{m-1})C + \ldots + (b_{n-1} - b_n)C + b_n C = 2bmC < e, \quad m \geq n_0; \quad |A_k| < C$$

Следовательно, критерий Коши выполнен, поэтому ряд сходится.

Из признака Дирихле следует признак Лейбница:

Если $a_n = (-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$.

<u>Признак Абеля.</u>

Пусть дан ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$: $1)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; $2) b_n$ монотонна и ограничена — тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

<u>Доказательство.</u>

$\exists \lim b_n = b, \quad b_n \downarrow b$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)}_{\text{сходится по Дирихле}} + \underbrace{b\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{сходится по условию признака}}$$

Доказано.

ПРИМЕР 1:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x -$ фикс., $x \neq pk$: $a_n = \sin nx; \quad b_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$

$$\left|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx\right| = \frac{\left|2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} =$$

$$= \frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq$$

$\le \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \Rightarrow \ \forall x$ сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, аналогично ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ сходится.

Докажем, что эти ряды сходятся условно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n}.$$

Так как $\dfrac{|\sin nx|}{n} \ge \dfrac{\sin^2 nx}{n}$, рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nx}{n}}_{\text{расходится} \ \Leftarrow} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}}_{\text{сходится}}.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin nx|}{n}$ – расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ сходится условно.

ПРИМЕР 2:

При произвольной перестановке членов условно сходящегося ряда его сумма может измениться:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Переставим члены этого ряда следующим образом:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\right] = \frac{1}{2}\ln 2 \ne \ln 2.$$

Теорема Римана (без доказательства).

Пусть дан условно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда: $\forall C \in \Re$ (и для $C = \pm\infty$) $\exists$ перестановка слагаемых, такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = C$.

Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося числового ряда.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Тогда, для любой перестановки ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A'$ новый ряд сходится. При этом, ряд A' сходится абсолютно и его сумма равна сумме исходного ряда, то есть $A = A'$.

Доказательство.

Рассмотрим два случая:

1) $a_n \geq 0$ $\qquad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad A' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$

$A_n = a_1 + ... + a_n \quad \uparrow$

$A'_k = a_{n1} + ... + a_{nk} \uparrow$

k – фикс., $n \geq \max(n_1, ..., n_k)$, тогда $A_n \geq A'_k$, $\quad A_n \leq C \Rightarrow A'_k \leq C;$

$\lim_{n\to\infty} A_n \geq \lim_{n\to\infty} A'_k \Rightarrow A \geq A'.$

Аналогично рассматривается ряд A, как полученный перестановкой членов A':

$A \leq A' \Rightarrow A = A'.$ Доказано.

2) a_n – произвольного знака. Пусть тогда:

$$0 \leq a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0, & a_n \leq 0 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$0 \leq a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = a_n^+ - a_n^- \\ |a_n| = a_n^+ + a_n^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n^+ = \dfrac{a_n + |a_n|}{2} \\ a_n^- = \dfrac{|a_n| - a_n}{2} \end{cases};$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ – сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ – сходится, так как ряд A сходится абсолютно

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$

Применяя к $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ результат из 1), получим полное доказательство.

Доказано.