Лекция №4.

4.10.2002

Функциональные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ – **функциональный ряд**, $f_n(x), f(x)$ – функции от $x \in D \subset \mathbf{R}$, где D – область сходимости ряда.

Примеры функциональных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ – **степенной ряд**.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ – **тригонометрический ряд Фурье**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 0 \quad D = (-1;1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x_n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad D = (-1;1]$$

<u>Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда</u>.

Определение равномерной сходимости на множестве $E \subset \mathbf{R}$ функциональной последовательности:

$\{F_n(x)\} \quad F_n(x) \to F(x); x \in E$.

<u>Определение</u>. $F_n(x) \underbrace{\overset{E}{\rightrightarrows}}_{\substack{\text{равномерно} \\ \text{сходится на } E}} F(x): \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \ge n_0 : \forall x \in E \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

ПРИМЕР:

$\{x^n\}$

$E_1 = [0;\tfrac{1}{2}] \quad x^n \overset{E_1}{\rightrightarrows} 0 \quad |x^n| \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \varepsilon \Rightarrow n \ge \log_{1/2} \varepsilon$

$E_2 = [0;1) \quad x^n \overset{E_2}{\to} 0$ (неравномерно) $\quad |x^n| < \varepsilon \quad n$ – фикс., $n \ge n_0$, $x \in [0;1)$, $x^{n_0} \to 1 \ (x \to 1)$

<u>Критерий Коши</u>: $F_n(x)\overset{E}{\Rightarrow}F(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n \ge m \ge n_0: \forall x\in E \Rightarrow |F_n(x)-F_m(x)|<\varepsilon.$

Определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве E:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\overset{E}{\Rightarrow} f(x),\ E\subset D.$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall x\in E \Rightarrow |f(x)-S(x)|<\varepsilon \sim |R_n(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow R_n(x)\overset{E}{\Rightarrow}0.$$

$$S(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),\quad R_n(x)=\sum_{k=n-1}^{\infty} f_n(x)$$

<u>Критерий Коши</u>: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\overset{E}{\Rightarrow} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n\ge m\ge n_0,\ \forall x\in E \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=m}^{n} f_k(x)\right|<\varepsilon$.

<u>Следствие</u>. Если $\exists\{x_n\},\ x_n\in E: f_n(x)\not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не сходится равномерно.

Примеры рядов, не сходящихся равномерно:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \quad E=(-1;1) \quad x_n=1-\frac{1}{n};\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \Rightarrow$ сходится неравномерно.

2) $E=[-\delta;\delta],\ 0<\delta<1$

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right|=\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|<\frac{\delta^{n+1}}{1-\delta}<\varepsilon \Rightarrow \text{сходится равномерно.}$$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^4} \quad E=[0;+\infty);\quad x\ne 0$

$$\frac{nx}{1+n^4x^4}<\frac{nx}{n^4x^4}=\frac{1}{n^3x^3},\ x_n=\frac{1}{n}\ f_n(x)=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^4\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}\ne 0 \Rightarrow \text{сходится неравномерно.}$$

<u>Признак равномерной сходимости</u>.

1) Признак Вейерштрасса (мажорантный признак)

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x\in E,\quad |f_n(x)|<a_n,\ \forall x\in E$

и если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство (по критерию Коши).

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_n(x)\right| \le \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon \ \forall x \in E$$

ПРИМЕРЫ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad x \in [-\delta;\delta],\ 0<\delta<1; \quad \left|x^n\right| < \delta^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \text{ – сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ сходится равномерно.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \qquad \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{сходится равномерно.}$$

К ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ признак Вейерштрасса неприменим.

2) Признак Абеля – Дирихле.

Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x),\ x \in E \subset D$.

Абеля	Дирихле
Если:	Если:
1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{E}{\Rightarrow} 0$	1) $\left\|a_1 + \ldots + a_n\right\| \le C$
2) $\left\|b_n(x)\right\| \le C$, x – фикс., $b_n(x)$ – монотонная по n последовательность,	2) $b_n(x) \downarrow\downarrow 0$ $(\uparrow\uparrow 0)$ по n монотонно, по x равномерно,

То ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится равномерно на E.

ПРИМЕРЫ:

$$1)\ E = [\delta;\ 2\pi - \delta] \Rightarrow (\sin x + \ldots + \sin nx) \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}; \quad \frac{1}{n} \downarrow\downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \overset{E}{\Rightarrow}$$

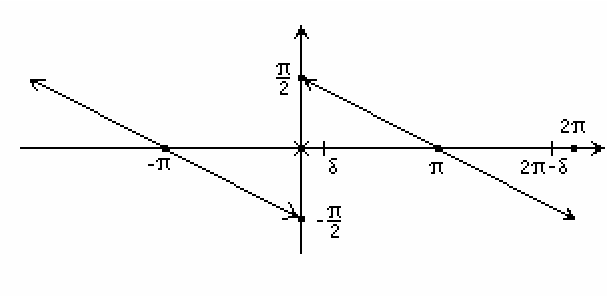
2) $E = \mathbf{R}$

$\forall \varepsilon\ \exists n_0 : \forall n \geq m \geq n_0 : \forall x \in E = [0; 2\pi] \Rightarrow$

$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{m}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ равномерно не сходится.

$n = 2m,\ x = \frac{\pi}{4m} \quad |\sin kx| = \sin k \cdot \frac{\pi}{4m} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$y = \frac{\pi - x}{2} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ x \in (0; 2\pi)$ (без доказательства).



Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{E}{\Rightarrow} f(x)$; $\underline{f_n(x) \in C(E)} \Rightarrow f(x) \in C(E)$.

Доказательство.

$x_0 \in E$. Докажем, что $f(x) \in C(x_0)$:

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) \to 0 \\ f(x) = S_n(x) + R_n(x) \\ S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x),\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k \end{cases} \Rightarrow$$

$$|f(x) - f_n(x)| = |S_n(x) - S_n(x_0) + R_n(x) - R_n(x_0)| < \underbrace{|S_n(x) - S_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|R_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|R_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Доказано.

Теорема об интегрировании функционального ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x), \quad x \in E = [a;b]; \quad f_n(x) \in C[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)}_{\text{числовой ряд}}.$$

Доказательство.

$$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x); \quad f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b R_n(x)dx$$

$$|R_n(x)| \overset{(\text{т.к. } R_n(x) \rightrightarrows 0)}{<} \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$\left|\int_a^b R_n(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$