Лекция 5

Дифференцирование функциональных рядов

Теорема: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \to f(x),\ x \in O(a),$

$f_n'(x) \in C(O(a)),$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \overset{O(a)}{\underset{\to}{\to}} g(x)$$

$Тогда\ f(x) \in D(O(a))\ и$

$f'(x)=g(x),\ x \in O(a)$

Доказательство. (на основании теоремы об интегрировании функционального ряда) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)=g(t),\ t \in [a,x]$ – непрерывная функция, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)$ равномерно сходится на $O(a)$. На основании теоремы об интегрировании функционального ряда этот ряд можно проинтегрировать почленно и получить равномерно сходящийся на $O(a)$ ряд.

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - f_n(a) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f(x) - f(a)$$

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = g(x), x \in O(a)$$

Степенные ряды

Степенными рядами называются ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0 \right)^n$, где a_n, x_0 –постоянные, x – переменная.

Мы будем рассматривать ряды с $x_0=0$, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbf{R}$

1 теорема Абеля. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится при некотором x_0. Тогда для $\forall$ h<$|x_0|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на [-h;h]

Доказательство. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\left| a_n x_0^n \right| \to 0 \Rightarrow \left| a_n x_0^n \right| < M$, где M>0 – некоторая постоянная.

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \right| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \cdot \left(\frac{h}{x_0} \right)^n, x \in [-h; h], n = 1,2,....$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{h}{x_0}\right)^n \text{ сходится } \Rightarrow \text{по признаку Вейерштрасса } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-h;h]}{\rightrightarrows}$$

<u>Следствие:</u> 1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f(x) \in C[-h;h]$

Область сходимости степенного ряда

D=$\{\{0\}, [-R;R], (-R;R], [-R;R), (-R;R), (-\infty;+\infty)\}$, где R – радиус сходимости.

Любой степенной ряд сходится в точке x=0. В остальных случаях ряд сходится при всех $|x| < R$, если R – *радиус сходимости* (точная верхняя грань множества x, для которых ряд сходится)-существует. Если точной верхней грани нет, то полагают $R = \infty$ - ряд сходится на всей числовой прямой.

Приведем примеры:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n,\ D = \{0\};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},\ D = [-1;1];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n},\ D = (-1;1];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ D = [-1;1);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ D = (-1;1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ D = (-\infty;+\infty)$$

Чтобы найти радиус сходимости, можно воспользоваться признаками сходимости знакопостоянных рядов Даламбера либо Коши.

Признак Даламбера:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_n x^n| \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lambda < 1 \qquad \frac{|a_{n+1}\cdot x|}{|a_n|} \to \lambda < 1$$

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R \qquad \boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

<u>Примечание</u>. Если ни один из указанных пределов не существует, то нужно положить радиус сходимости равным <u>нижнему пределу</u> (наименьшему частичному пределу) выражения для R.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^n\right)^n}{3^n}\cdot x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k+1}}\cdot x^{2k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}$

$|x|<3$ $\qquad$ $|x|<1$ $R=1$

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{\left(2+(-1)^n\right)^n}{3^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2+(-1)^n}$ не существует.

<u>2 теорема Абеля.</u>

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится в точке $x=x_0$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится равномерно на отрезке $[0;x_0]$ (или $[x_0;0]$ если $x_0<0$). $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \begin{array}{c}\xrightarrow{[0;x_0]}\\ \rightarrow\end{array}\right)$

Доказательство. $a_nx^n=a_nx_0^n\cdot\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$

1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_0^n\xrightarrow{[0;x_0]}$ по условию

2) $0\le\frac{x}{x_0}\le1$ $\qquad$ $\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$ - невозрастающая по n функция.

Следствия:

1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, D – область сходимости

$f(x)\in C(D)$

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $\qquad$ $\ln2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

2) $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$, D – область сходимости

$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n(n+2)}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n, D=(-1;1),$ $\qquad$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}, D=[-1;1)$

3) $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}, \forall x\in(-R;R)$

$f(x)\in C^{\infty}(-R;R)$

<u>Ряды Тейлора</u>

Применяя последовательно теорему о почленном дифференцировании степенного ряда, получим соотношение для n-го коэффициента ряда.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, R>0, R\neq 0, R=\infty$$
$$x=0 \Rightarrow f(0)=a_0$$
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$
$$x=0 \Rightarrow f'(0)=a_1$$
$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$
$$x=0 \Rightarrow f''(0)=2!a_2, a_2=\frac{f''(x)}{2!}$$

.

.

.

$$f^{(n)}(0)=n!a_n$$

$\boxed{a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$ - коэффициенты степенного ряда Тейлора

$f(x)\in C^{\infty}(D)$

$f(x)\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ - в общем случае неверно, т.е. ряд Тейлора для функции $f(x)$ не всегда совпадает с самой функцией.

Пример.

$$f(x)=\begin{cases}0, x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\end{cases} \qquad f(x)\in C^{\infty}(\mathbf{R}) \quad f^{(n)}(0)=0, n=1,2,...$$

Пусть $f(x)\in C^{\infty}(D), D=(-R;R)$

и $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq c, c>0, x\in D$; тогда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, x\in D$

Доказательство. По формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа получим:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}+r_n, \qquad r_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \xi\in(0;x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_n|<\frac{C\cdot R^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$