Лекция 7

Дифференциальные уравнения

§ Дифференциальные уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$. *Интегральные кривые. Теорема о существовании и единственности решения с данными начальными условиями (задача Коши)*

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, где $F(t_0, t_1, ..., t_{n+1})$ - функция, определенная в некоторой области D пространства $\mathbf{R}^{n+2}$, x - независимая переменная, y - функция от x, $y', ..., y^{(n)}$ - ее производные.

Порядком уравнения n называется наивысший из порядков производных y, входящих в уравнение.

Функция $f(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения на промежутке $(a; b)$, если для всех x из $(a; b)$ выполняется равенство: $F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$. Дифференциальному уравнению удовлетворяет бесконечное множество функций, но при некоторых условиях решение такого уравнения единственное.

Интегральная кривая – это график решения дифференциального уравнения, т.е график функции, удовлетворяющей этому уравнению.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 0$. Его решение: $f(x) = const$ определено на $(-\infty; \infty)$. Отметим, что эта постоянная – произвольная и решение – не единственное, а имеется бесконечное множество решений.

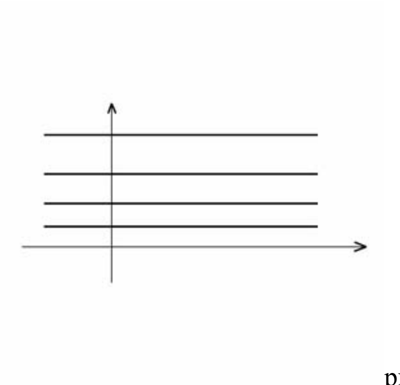

рис.1

Более сложное уравнение, в котором производная непостоянная, имеет вид: $y' = f(x, y)$. Это – уравнение первого порядка, *разрешенное* относительно y'. (Термин «разрешенное» означает, что y' выражается через остальные величины, в отличие от уравнения общего вида $F(x, y, y') = 0$, из которого выразить y' может быть и не удастся). Это уравнение также имеет бесконечно много решений, отличающихся на константу С (см. рис. 2):

$y = \int f(x)dx = F(x) + C$ Это решение дифференциального уравнения описывается серией функций:

при С=0 y=F(x)

при С=1 y=F(x) + 1 и т.д. Таким образом серия графиков получена параллельным переносом на константу С.

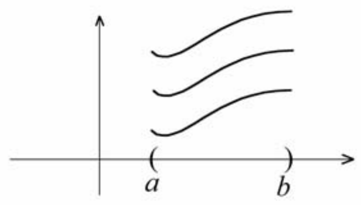

рис.2

Более сложные дифференциальные уравнения обычно стараются свести к таким простейшим уравнениям 1-го порядка, разрешенным относительно производной, которые легко решить интегрированием.

Пример 2

Выведем закон движения тела, брошенного с начальной скоростью V под углом α к горизонту.

$V_1 = V\cos\alpha$

$V_2 = V\sin\alpha$

$y(0) = x(0) = 0$

$x(t) = V_1 \cdot t = V\cos\alpha \cdot t$

$y''(t) = -g$

$y'(t) = -gt + C$

$y'(0) = V_2 \Leftrightarrow V_2 = -gt + C \Leftrightarrow C = V_2$

$y'(t) = -gt + V_2$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_2 t + C_1$

Но по условию y(0) = 0 → $C_2 = 0$ → $y(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_2 t$

Найдем время подъема: $y'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{V_2}{g}$

Найдем высоту подъема: $y_{\max} = -\frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{g} = \frac{V_2^2}{2g}$

Дальность полета x_{max} (при y(t) = 0)

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2V_2}{g} \end{cases} \Rightarrow x_{\max} = V_1 \frac{2V_2}{g} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{4}, x_{\max} = \frac{V^2}{g}$

<u>Уравнения, не разрешенные относительно производной.</u> Общее уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ можно пытаться решать разными методами.

Во-первых, можно попытаться все-таки его разрешить относительно производной и свести исходное уравнение к одному или нескольким уравнениям вида $y' = f(x, y)$.

Альтернативные формы записи такого уравнения: $\frac{dy}{dx} = f(x, y);\wedge dy = f(x, y)dx;$ $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Решение дифференциального уравнения записывают в виде:

$y = y(x, C)$

либо для неразрешенного относительно производной в виде неявной функции:

$\Phi(x, y, C) = 0$

<u>Пример 3</u>

Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, интегрируя обе части уравнения, получим

d(lny) = d(lnx) $\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C$.

Потенциируя обе части уравнения, получаем общее решение y = Cx, которое изображается серией линейных интегральных кривых, проходящих через точку (0,0). При этом из графика (рис.3) видно, что через любую точку, не принадлежащую (0,0), проходит только одна интегральная кривая (решение).

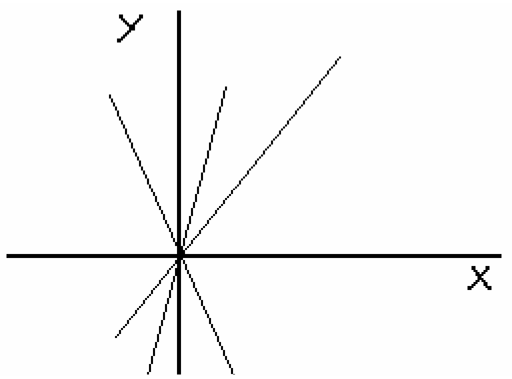

Рис.3

<u>Пример 4</u>

Рассмотрим уравнение $y' = -\frac{x}{y}$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ $\Rightarrow 2ydy + 2xdx = 0 \Leftrightarrow d(x^2 + y^2) = 0$ интегрируя, получаем: $x^2 + y^2 = C = R^2$ (рис.4)

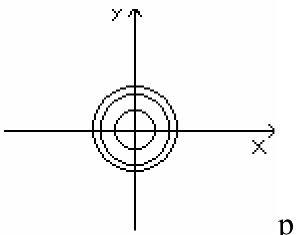

рис.4

1) Общее решение– множество решений, содержащее константу.
2) Частное решение получают при подстановке конкретного значения константы в общее решение

   Особые решения не входят в общие решения через каждую точку особого решения проходит более одной интегральной кривой.

<u>Пример5</u>

$y = 2 \cdot \sqrt{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = (x - C)^2 - \textit{общее} \\ y = 0 - \textit{особое} \end{array} \right.$ см. рис.5 (через каждую точку на оси Ox проходит два решения (две интегральные кривые): частное и особое).

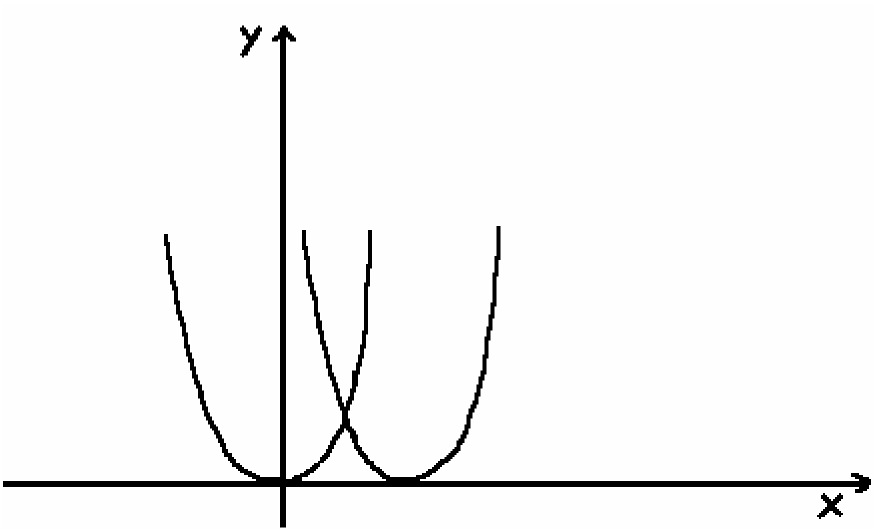

Рис.5

Можно построить интегральную кривую в каждой точке, используя понятие о геометрическом смысле производной: tgα = f(x,y) (рис.6). Таким образом задают *поле направлений*, т.е. задают прямую в каждой точке, а потом проводят кривую касательную ко всем прямым в этих точках и получают интегральную кривую (одно из решений).

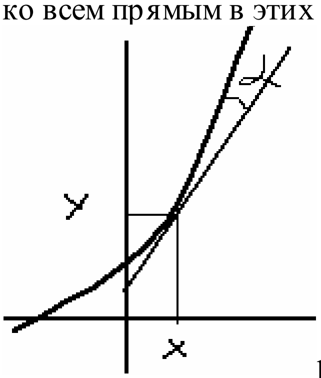

рис.6

Сформулируем важнейшую теорему.

Теорема. (О существовании и единственности решения задачи Коши дифференциального уравнения y'=f(xy)). Пусть $f(x,y)$ - непрерывная функция (рис.7) в области $D = \{(x,y); a \le x \le b; c \le y \le d$, причем $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ - также непрерывна в D . Тогда существует единственное решение y=y(x) дифференциального уравнения y'=f(xy) с начальным условием $y(x_0)=y_0$, (x_0,y_0) принадлежит D. Следовательно, через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит только одна интегральная кривая.

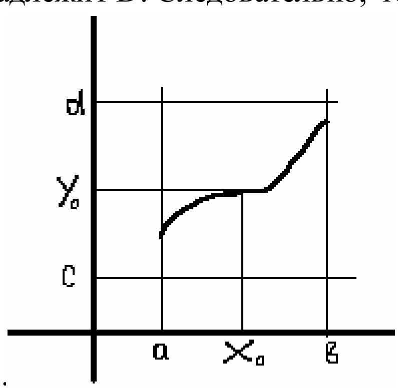

Рис.7

(без доказательства).

Пример 7

Рассмотрим подробнее уравнение $y = 2 \cdot \sqrt{y}$:

$$f(x,y) = 2 \cdot \sqrt{y} \qquad \frac{df}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Так как производная функции f(y) неопределена при y = 0 (разрыв вдоль оси Ox), то при y = 0 есть еще одно решение (особое).

Основные тины дифференциальных уравнений

1) **Уравнения с разделяющимися переменными.** Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$, где $f(x)$ - непрерывна на некотором $(a;b)$, а $g(y)$ непрерывна на $(c;d)$, причем $g(y) \neq 0$ на $(c;d)$. $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ (метод разделения переменных). Интегрируя обе части, получаем $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Обозначая $G(y)$ любую первообразную для $\frac{1}{g(y)}$, а $F(x)$ - любую первообразную для $f(x)$, перепишем это уравнение в виде неявно выраженной функции $G(y) = F(x) + C$. Это – искомая интегральная кривая.

Рассмотрим пример такого уравнения

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрируя, получим $\arcsin y = \arcsin x + C$. Возьмем синус от обеих частей алгебраического уравнения: $y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = C_1$ (общее решение в неявном виде).

2) **Однородные уравнения.** Под *однородными* уравнениями понимаются уравнения вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Для их решения требуется сделать замену $y = tx$, после чего получится уравнение с разделяющимися переменными: $y' = t'x + t$ $t'x + t = f(t)$ $t'x = f(t) - t$ $x\frac{dt}{dx} = f(t) - t$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dt}{x}.$$

Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right)$. Такие уравнения сводятся к однородным заменой переменных. В случае, если прямые $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$ пересекаются в точке (x_0, y_0), то замена $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ приведет уравнение к однородному. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1 x + b_1 y = k(ax + by)$ и замена $z = ax + by$ приведет к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим параболическое зеркало. Расположим начало координат в фокусе параболы (рис.8). Такое зеркало имеет интересное свойство: при помещении источника света в фокус зеркала лучи, радиально расходящиеся в разные стороны , после отражения становятся параллельными (так получают плоские световые волны), причем по закону отражения угол падения равен углу отражения.

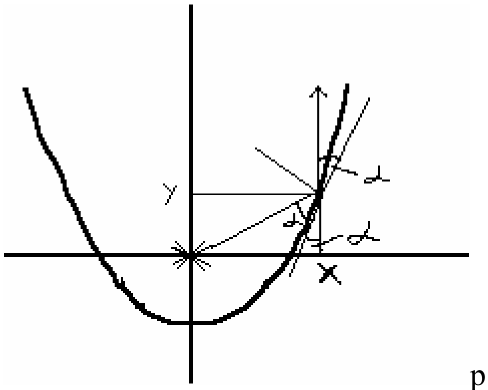

рис.8

$$tg\beta = ctg\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{x}{y} = \frac{2ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{2y'}{1+(y')^2}$$

$$1+(y')^2 = \frac{2y}{x}y'$$
$$(y')^2 + \frac{2y}{x}y' + 1 = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$$

Введем замену: $y = zx \Rightarrow y' = xz' + z$ и рассмотрим один случай, когда $xz' + z = z + \sqrt{z^2-1}$

Сокращая на z, получаем $x\frac{dz}{dx} = \sqrt{z^2-1}$ интегрируем равенство:

$$\ln(z + \sqrt{z^2-1}) = \ln x + \ln C$$
$$z + \sqrt{z^2-1} = Cx$$
$$\sqrt{z^2-1} = Cx - z$$

Возводим в квадрат $z^2 - 1 = C^2x^2 - 2Cxz + z^2 \Rightarrow z = \frac{Cx}{2} + \frac{1}{2Cx} \Rightarrow y = zx = \frac{Cx^2}{2} + \frac{1}{2C}$

Таким образом, получено уравнение параболы с фокусом в начале координат.