Лекция 8

1) $\dfrac{dx}{dt}=(a-x)(b-x)$ $\qquad\dfrac{dx}{(a-x)(b-x)}=dt$

Разложим на множители:

$\dfrac{1}{(a-x)(b-x)}=\dfrac{A}{a-x}+\dfrac{B}{b-x}$ $\quad 1=A(b-x)+B(a-x)$ при x=a $\quad$ 1 =A(b-a) $\Rightarrow$ A=–1/(a–b)

при x = b $\quad$ 1= B(a–b) $\Rightarrow$ B=1/(a–b)

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int dt\Leftrightarrow\frac{1}{a-b}\ln(a-x)-\frac{1}{a-b}\ln(b-x)+C=t$$

В точке (0,0) частное решение исходного уравнения: $\dfrac{1}{a-b}\ln\dfrac{a}{b}+C=0\Rightarrow$

$$\frac{1}{a-b}\ln(a-x)-\frac{1}{a-b}\ln(b-x)-\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}=t\Rightarrow\frac{1}{a-b}\ln\frac{b(a-x)}{a(b-x)}=t$$

2)Найдем закон T(t) остывания кипящей воды до комнатной температуры ($t_{комн}=20^0$) и время достижения 40^0, если до 60^0 вода остывает за 20 мин. Известно, что мгновенная скорость остывания линейно зависит от разницы T и $t_{комн}$.

Составим дифференциальное уравнение: $\dfrac{dT}{dt}=k(T-20)$ $\qquad\dfrac{dT}{T-20}=kdt$

$\ln(T-20)=kt+\ln C$

$T-20=Ce^{kt}$

$$\begin{cases}T=100=20+Ce^0\\60=20+80e^{20k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=80\\e^{20k}=0.5\Rightarrow k=2^{-0.05}\end{cases}\qquad\begin{aligned}&T(t)=20+80\cdot2^{-0.05t}\\&\Rightarrow T(t)=40\Rightarrow t=40\end{aligned}$$

1) Найти количество соли в растворе через время t, если известно, что изначально было 10 кг соли в 100 л воды, но каждую минуту в резервуар поступает 20 л воды, а выливается 20 л раствора.

$V_{р-ра}(t)$ = 100 + 30t –20t = 100 + 10t $\qquad$ x(0)=0, x(t)– количество соли

$\dfrac{x(t)}{V(t)}=\dfrac{x}{100+10t}$; $\qquad\dfrac{x}{100+10t}20\Delta t=-\Delta x$;

$\dfrac{2xdt}{10+t}=-dx\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{2dt}{t+10}$

$\ln x=-2\ln(t+10)+\ln C$; $\quad x(t)=\dfrac{C}{(t+10)^2}$; при t = 0 $\;$ x(t)=10$\Rightarrow$ C = 1000

$x(t)=\dfrac{1000}{(t+10)^2}$

4)Найти точный закон радиоактивного распада, если t_0–период полураспада., а x_0–начальное количество. Причем известно, что мгновенная скорость распада линейно зависит от мгновенного количества вещества.

$\dfrac{dx}{dt}=kx$ $\qquad\dfrac{dx}{x}=kdt$ $\qquad\ln x=kt+\ln C$ $\qquad x(t)=Ce^{kt}$

Задано, что x (0)=x_0; x(t_0)= x_0/2 $\Rightarrow x_0=C$; $\dfrac{x_0}{2}=x_0e^{kt_0}\Rightarrow e^k=2^{-\frac{1}{t_0}}$

Таким образом закон распада: $\frac{x_0}{2} = x_0 2^{-\frac{t}{t_0}}$

<u>Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка.</u>

такие уравнения в общем виде могут ыть представлены как: $y' + p(x)y = q(x)$

Пусть y = UV, где U, V– некоторые функции от x, тогда подставляя получаем

$U'V + (V'U + pUV) = q$

$U'V + U(V' + pV) = q$

Выберем V(x) так, чтобы она удовлетворяла условию:

$V' + pV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -pV \Rightarrow \frac{dV}{V} = -pdx$

$\ln V = -\int p(x)dx$ Берем любую функцию, удовлетворяющую этому уравнению, например, V = V(x) и подставляем в исходное уравнение

$$U'V(x) = q(x) \Rightarrow U' = \frac{q(x)}{V(x)} \Rightarrow U = \int \frac{q(x)}{V(x)} + C$$

<u>Пример</u>

$y' + \frac{y}{x} = e^x$ Замена: y = UV

$U'V + (UV' + \frac{UV}{x}) = e^x \Rightarrow V' + \frac{V}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x} \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dx}{x}$

Так как ищем одно любое решение, то при интегрировании не надо добавлять константу:

$LnV = -Lnx \Rightarrow V = \frac{1}{x}$ Подставим в исходное уравнение:

$U'\frac{1}{x} = e^x \Rightarrow U = \int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Следовательно, $y = \frac{1}{x}(xe^x - e^x + C) = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$

Этот метод применим и для нелинейного уравнения: $y' + p(x)y = q(x)y^k$, где к– константа

Пусть y = UV, где U, V– некоторые функции от x, тогда подставляя получаем

$U'V + (V'U + pUV) = qU^kV^k$

$U'V + U(V' + pV) = qU^kV^k$

Выберем V(x) так, чтобы она удовлетворяла условию:

$V' + pV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -pV \Rightarrow \frac{dV}{V} = -pdx$

$\ln V = -\int p(x)dx$ Берем любую функцию, удовлетворяющую этому уравнению, например, V = V(x) и подставляем в исходное уравнение

$U'V(x) = q(x)U^kV^k \Rightarrow \frac{U'}{U^k} = \frac{q(x)}{(V(x))^{1-k}}dx \Rightarrow$ из последнего уравнения интегрированием находим U, а затем уже зная V(x) находим y.

<u>Пример</u>

Решим дифференциальное уравнение, описывающее прохождение по цепи переменного тока, чтобы найти зависимость мгновенной силы тока от времени.

$L\frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t$

Сделаем замену переменных: $i = UV$ и подставим

$$LU'V + (LV' + RV)U = \varepsilon \cos\omega t$$

$$LV' + RV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{R}{L}V \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\alpha dt \Rightarrow V = e^{-\alpha t}$$

Где примем замену: $\alpha = \dfrac{R}{L}$

$$LU'e^{-\alpha t} = \varepsilon_0 \cos\omega t \Rightarrow$$

$$U' = \frac{\varepsilon_0}{L} e^{\alpha t} \cos\omega t \Rightarrow$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{L}\int e^{\alpha t}\cos\omega t dt \Rightarrow I = \int e^{\alpha t}\cos\omega t dt = \frac{1}{\alpha}\int \cos\omega t de^{\alpha t} = \frac{1}{\alpha}(\cos\omega t \cdot e^{\alpha t} + \omega\int e^{\alpha t}\sin\omega t dt) = \frac{\omega}{\alpha}\int \sin\omega t de^{\alpha t}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos\omega t \cdot e^{\alpha t} + \frac{\omega}{\alpha^2}(\sin\omega t \cdot e^{\alpha t} - \omega i)$$

$$I(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}) = \frac{1}{\alpha}\cos\omega t \cdot e^{\alpha t} + \frac{\omega}{\alpha^2}\sin\omega t \cdot e^{\alpha t}$$

$$I(\omega^2 + \alpha^2) = \alpha\cos\omega t \cdot e^{\alpha t} + \omega\sin\omega t \cdot e^{\alpha t}$$

$$I = \frac{\alpha\cos\omega t \cdot e^{\alpha t} + \omega\sin\omega t \cdot e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{L}\int e^{\alpha t}\cos\omega t dt = \frac{\varepsilon_0}{L} e^{\alpha t}\frac{\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\alpha^2 + \omega^2} + C$$

$$i(t) = \quad \frac{\varepsilon_0}{L}\frac{\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\alpha^2 + \omega^2} + Ce^{-\alpha t}$$

Всегда можно ввести ω_0 (собственная частота): $\cos\omega_0 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$

$$\sin\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$i(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} + Ce^{-\alpha t}$ При больших t стремится к нулю $Ce^{-\alpha t}$

Уравнение Лагранжа имеет вид $y = y'x + \psi(y')$, где $\psi(p)$ - дифференцируемая функция. Решение находится в параметрическом виде $\begin{cases} y = y(p, C) \\ x = x(p, C) \end{cases}$

Уравнение Клеро – это частный случай уравнения Лагранжа: $y = xy' + \psi(y')$. Вводя параметр $y' = p$, получаем $y = xp + \psi(p)$ (т.е. $\phi(p) = p$, как раз оставшийся случай), $dy = pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp$ или $(\psi'(p) + x)dp = 0$. Тогда, если $dp = 0$, то $p = C$ и $y = Cx + \psi(C)$ - это общее решение уравнения Клеро (прямые линии). Если же $\psi'(p) + x = 0$, то $p = \omega(x)$. Тогда $y = x\omega(x) + \psi(\omega(x))$.

Пример

$y = xy' + (y')^2$ Общее решение уравнения будет: $y = Cx + C^2$; особое решение : 0=x+2C

$\Rightarrow C = -\dfrac{x}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{x^2}{4}$ Проверим, что последняя функция действительно является решением исходного уравнения: $-\dfrac{x^2}{4} = -x\dfrac{x}{2} + (-\dfrac{x}{2})^2$

Дифференциальное уравнение *n*-ного порядка

$F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$

Общее решение в неявном виде (должно содержать n произвольных независимых постоянных): $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$

Либо общее решение может быть найдено в явном виде: $y = y(x, y, C_1, ..., C_n)$

Пример

$y''(t) = -g$

$y'(t) = -gt + C$ Если задать начальные условия: y (0) = y_0 , V(0)=V_0 , то V_0=C_1

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$

y_0=C_2

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + y_0$

Чтобы решить задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка: $y' = f(x, y)$, т.е. найти функцию-решение (интегральную кривую), проходящую через данную точку, достаточно задать 1 условие: $y(x_0)= y_0$.

Но в случае дифференциального уравнения n-го порядка задать надо n условий. В этом состоит задача Коши.

Теорема. Пусть функция $f(x, t_0, t_1, ..., t_{n-1})$ определена и непрерывна в области $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\frac{\partial f}{\partial t_0}, ..., \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}$ непрерывны в D. Тогда *задача Коши*, состоящая в нахождении решения уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (где точки $\left(x_0, y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}\right)$ принадлежат области D) имеет, притом единственное решение, в окрестности $x=x_0$. Теорема сформулирована **без доказательства.**