Лекция 11

Замечательное свойство определителя Вронского для определителя 2-го порядка

$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ Пусть y_1, y_2 – фундаментальная система решений, тогда:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \qquad W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1'' & y_2'' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p_1 y_1' - p_2 y_1 & -p_1 y_2' - p_2 y_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p_1 y_1' & -p_1 y_2' \end{vmatrix} = -p_1 \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -p_1 W(y_1, y_2)$$

Таким образом определитель Вронского функций y_1, y_2, удовлетворяющих дифференциальному уравнению второго порядка , удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка.

$$\frac{dW}{W} = -p_1 dx \Rightarrow \ln W = -\int p(x)dx \Rightarrow W = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

Фундаментальных систем решений может быть много. Выбор фундаментальной системы решений зависит от начальных условий, так как при задании разных начальных условий получаются разные функции, описывающие фундаментальные решения, и соответственно разные значения определителей Вронского, отличающиеся на константу.

Аналогично для $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad W = Ce^{-\int p_1(x)dx}$

Пример

$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ Угадываем корень $y_1 = x$

$$y'' - 2x\frac{1}{x^2+1}y' + 2y\frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$p_1 = -\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow W' = -p_1 W = \frac{2x}{x^2+1}W \Rightarrow \int\frac{dW}{W} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$\ln W = \ln(x^2+1) + \ln C_1 \Rightarrow W = C_1(x^2+1) \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Найдем второе решение y_2: $W(x, y_2) = \begin{vmatrix} x & y_2' \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = xy_2' - y_2 = C_1(x^2+1) \Rightarrow y_2' - \frac{y_2}{x} = C_1(x + \frac{1}{x})$

Замена: $y_2 = UV$ $U'V + (UV' + \frac{UV}{x}) = C_1(x + \frac{1}{x}) \Rightarrow V' + \frac{V}{x} = 0$ Одним из решений последнего уравнения будет функция V = x, подставим ее в исходное:

$$U'x = C_1(x + \frac{1}{x}) \Rightarrow U' = C_1(1 + \frac{1}{x^2}) \Rightarrow U = C_1(x - \frac{1}{x}) + C_2 \Rightarrow y_2 = C_1(x^2-1) + C_2 x \Rightarrow$$

$y = C_1(x^2-1) + C_2 x$ общее решение. При $C_1 \neq 0$ y1 и y2 будут образовывать фундаментальную систему решений исходного уравнения.

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = q(x)$ (1)

Предположим, что найдена ф.с.р. соответствующего однородного уравнения (L(y)=q(x)=0): $y_1, ..., y_n$

Пространство решений неоднородного уравнения уже не является линейным пространством.

Теорема * Пусть $y_0(x)$ - решение уравнения $L(y) = q(x)$ (1). Тогда любое другое решение этого уравнения $y(x)$ имеет вид $y(x) = y(x_0) + Y(x)$, где $Y(x)$ - решение уравнения $L(y) = 0$, т.е. однородного.

$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=q$ Вычтем уравнения одно из другого и, вычитая производные:

$y_0^{(n)}+p_1(x)y_0^{(n-1)}+...+p_n(x)y_0=q$

$$(y-y_0)^{(n)}+p_1(x)(y-y_0)^{(n-1)}+...+p_n(x)(y-y_0)=0$$

Любое решение Y однородного уравнения представляется в виде линейной комбинации ф.р.

$Y=y-y_0=c_1y_1+...+c_ny_n$, т.е. $y=y_0+c_1y_1+...+c_ny_n$ (общее решение неоднородного).

Нахождение частного решения неоднородного уравнения.

Оно почти всегда находится, если известна ф.с.р. соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации постоянных

Этот метод уже был нами применен для неоднородного уравнения первого порядка.

Вернемся к неоднородному уравнению $L(y)=q(x)$ (1). Предположим, что мы можем найти фундаментальную систему решений $y_1,...,y_n$ соответствующего однородного уравнения $L(y)=0$ (2). Тогда, любое решение Y этого уравнения имеет вид: $Y=c_1y_1+...+c_ny_n$. Предположим также, что нам удалось найти некоторое решение y_0 уравнения (1). По теореме * , любое решение y этого уравнения имеет вид: $y=y_0+Y=y_0+c_1y_1+...+c_ny_n$(3). Итак, для нахождения всех решений уравнения (1) требуется найти какое-то одно его решение y_0. Для этого можно использовать *метод вариации постоянных*, который состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в виде $c_1(x)y_1(x)+...+c_n(x)y_n(x)$ (4), где $y_1,...,y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Отметим, что (4) напоминает (3), но имеет существенное отличие от этого равенства состоящее в том, что в (3) все c_i - постоянные, а в (4) это – неизвестные функции от x . Потребуем, чтобы кроме равенства (4) выполнялись такие равенства:

$$\begin{cases} c_1(x)y_1+...+c_n(x)y_n=y_0 \\ c_1(x)y_1'+...+c_n(x)y_n'+[c_1'(x)y_1+...+c_n'y_n]=y_0' \\ \vdots \\ c_1(x)y_1^{(n-1)}+...+c_n(x)y_n^{(n-1)}+[c_1'y_1^{(n-2)}+...+c_n'y_n^{(n-2)}]=y_0^{(n-1)} \\ c_1(x)y_1^{(n)}+...+c_n(x)y_n^{(n)}+[c_1'y_1^{(n-1)}+...+c_n'y_n^{(n-1)}]=y_0^{(n)} \end{cases} \left| \begin{matrix} p_n(x) \\ p_{n-1}(x) \\ \vdots \\ p_1(x) \\ 1 \end{matrix} \right. \qquad (*)$$

(домножаем и складываем ур.)

Пусть выражения в квадратных скобках равны нулю, кроме последней скобки, равной q. Тогда при сложении в первом столбце(и в последующих) получится ноль, но в последнем будет q(x).

$\Rightarrow y_0^{(n)}+p_1(x)y_0^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y_0'+p_ny_0=q(x)$ Но это равенство выполняется только в случае выполнения принятой нами системы условий, т.е. если найдены функции $C_k(x)$, удовлетворяющие этой системе условий(*), то функция y0 есть частное решение неоднородного уравнения.

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \ldots + c_n' y_n \equiv 0 \\ c_1' y_1' + \ldots + c_n' y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} \equiv 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} \equiv q(x) \end{cases}$$

Получили таким образом обычную систему (*) линейных уравнений, которая имеет единственное решение, если не равен нулю определитель системы, т.е. определитель Вронского. Для того, чтобы отыскать $c_1,\ldots,c_n$ следует воспользоваться системой (*), рассматривая ее как систему линейных уравнений относительно неизвестных $c_1',\ldots,c_n'$ с определителем $W(x) \neq 0$.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$ Решения системы (*) можно найти по формулам Крамера.

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' = \rho_1(x) \\ \ldots \\ c_n' = \rho_n(x) \end{cases}$$ интегрируем и находим искомые $C_1,\ldots,C_n$.

<u>Пример</u>

$y'' - 3y' + 2y = x \qquad y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2 \Rightarrow$

$y_1 = e^x \qquad y_2 = e^{2x} \Rightarrow Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow$ Вычтем одно уравнение из другого: $C_2' e^{2x} = x \Rightarrow C_1' = -xe^{-x}$

$C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = x \qquad C_2' = xe^{-2x}$

$C_1 = -\int xe^{-x} dx = \int x de^{-x} = xe^{-x} - \int e^{-x} dx = (x+1)e^{-x}$

$C_2 = \int xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int x de^{-2x} = -\frac{1}{2}(xe^{-2x} - \int e^{-2x} dx) = -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$

$\Rightarrow y_0 = (x+1)e^{-x}e^x - \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}e^{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ –частное решение неоднородного уравнения

$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ –общее решение неоднородного уравнения.